CNRS - CEPREMAP

AVRIL 1980

N° 8004

L'EQUILIBRE ECONOMIQUE GENERAL TRANSITIF ET INTRANSITIF PROBLEMES D'EXISTENCE

par

Monique GEISTDOERFER-FLORENZANO

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Comme son titre l'indique, cette monographie est consacrée à un problème limité dont la résolution est un préalable indispensable de la théorie de l'équilibre général : l'existence de l'équilibre, dans le cadre des hypothèses et de la formalisation adoptées pour le définir.

Lontemps évacué dans la réponse naïve qui consistait à comparer le nombre des équations au nombre des inconnues, le problème de l'existence de l'équilibre a été posé, pour la première fois, par A.WALD, dans une série d'articles précurseurs (1933-1936) indiquant le rôle des théorèmes de point fixe pour établir l'existence de quantités et de prix positifs comme solutions d'un système de Walras-Cassel d'équations de la production ou, encore, l'existence d'un équilibre pour une économie d'échange pur, dans l'hypothèse Walrassienne où l'utilité marginale de chaque bien d'un panier de consommation est, pour chaque consommateur, une fonction positive et strictement décroissante de la quantité du seul bien considéré. Mais ce problème ne s'est trouvé complètement formulé et résolu que dans les années 50, quand s'est précisé le modèle d'économie de propriété privée aujourd'hui considéré comme la formalisation la plus propre à unifier les problèmes de production et d'échange dans l'équilibre Walrassien.

Comme on le sait, dans ce modèle où le nombre de biens est fini, un nombre fini de consommateurs, qui possèdent les ressources initiales et perçoivent les profits réalisés par les producteurs, consomment les biens rendus disponibles sur le marché, au mieux de leurs préférences, dans les limites définies par leur ensemble de consommation et leur contrainte budgétaire, tandis qu'un nombre fini de producteurs, qui maximisent leur profit dans leur ensemble de production, produisent les biens qui sont destinés, concurremment avec les ressources initiales non utilisées par la production, à satisfaire la demande des consommateurs.

Une économie de propriété privée est ainsi définie par la donnée

$$E = ((X^i, R^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, (Y^j)_{i=1,\dots,n}, (\theta^{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}})$$

./.

des ensembles de consommation X^i, des préférences R^i et des ressources initiales ω^i de chacun des consommateurs, des ensembles de production Y^j de chacun des producteurs, et de la clé θ^{ij}, de répartition des profits. Un cas particulier est l'économie d'échange pur $E = ((X^i, R^i, \omega^i)_{i=1...m})$ dans laquelle il n'y a pas de production.

L'équilibre d'une telle économie est définie comme un système de prix et de quantités qui assurent simultanément l'effectivité des comportements d'optimisation de chacun des agents, l'égalisation, pour chaque bien, des ressources et des emplois et la dépense des revenus issus de la production et de la vente des ressources initiales.

Les recherches sur l'existence de l'équilibre ont connu deux périodes d'activité entre lesquelles la théorie de l'équilibre général s'est développée, dans le cadre strict du modèle qui vient d'être défini, sur des questions autres que celles de l'existence (calcul d'équilibres, étude de la structure et de la continuité de l'ensemble des équilibres,...) ou à travers diverses généralisations du modèle (à un nombre infini de biens, à un espace mesuré d'agents, par introduction de l'Etat, de la monnaie, etc...) induisant d'autres problématiques mais requérant aussi des théorèmes d'existence spécifiques.

Une première période va de 1952 à 1962, période pendant laquelle un assez important nombre d'articles repèrent et adaptent les théorèmes de point fixe utilisés, identifient, discutent et classent les hypothèses nécessaires à l'obtention du résultat. Pendant toute cette période, les préférences des consommateurs sont communément supposées former un préordre total sur leur ensemble de consommation, hypothèse qui définit ce que nous appelons dans cette monographie l'équilibre transitif.

La deuxième période commence en 1974 avec un article de A. Mas-Colell montrant que l'existence de l'équilibre général, dans une économie, finie peut être établie sans aucune hypothèse de transivité ou de totalité des préférences des consommateurs sur leur ensemble de consommation, c'est-à-dire sans aucun appel à l'idée sous-jacente d'utilité des paniers de biens pour chacun des consommateurs. Un tel équilibre est appelé équilibre "intransitif", par opposition à l'équilibre "transitif".

./.

Bien que préparé par un article de Schmeidler (1969) montrant que la totalité des préférences n'était pas nécessaire à l'existence de l'équilibre dans une économie comportant un "continu" d'agents, dès lors que le "grand nombre" d'agents exerçait en effet "convexifiant" sur les correspondances de demande, le résultat de Mas Colell était surprenant, dans une théorie construite initialement sur la notion transitive d'utilité, et ne pouvait manquer de susciter de nouvelles recherches sur les conditions d'existence de l'équilibre. A la suite de cet article, les méthodes de démonstration de l'existence de l'équilibre transitif d'une économie comportant un nombre fini d'agents ont été retravaillées dans le sens d'une plus grande transparence économique de la démarche mathématique, tandis qu'une série de "nouveaux théorèmes d'existence" établissaient progressivement une approche standard de l'équilibre intransitif et portaient successivement les théorèmes d'existence, sans transitivité des préférences, à un niveau de généralité dans les autres hypothèses, comparable à celui atteint pour l'existence de l'équilibre transitif.

L'objet de cette monographie est de rendre compte de l'ensemble des travaux qui viennent d'être évoqués et de présenter de façon à la fois synthétique et complète le dernier état d'une question qui est maintenant relativement close : celle de l'existence de l'équilibre dans une économie finie.

Elle comporte trois chapitres dont chacun a été rédigé de façon à en permettre une lecture autonome.

Parce-que toute démonstration de l'existence de l'équilibre repose sur un théorème de point fixe, le chapitre I est un exposé de la théorie des théorèmes de point fixe, ou d'existence d'éléments maximaux, dérivés du théorème de Brouwer, dont la systématicité et la généralité vont volontairement au-delà des besoins des applications qui en sont faites dans les chapitres II et III mais sont, nous semble-t-il, susceptibles d'en permettre une meilleure compréhension.

Le chapitre II est une approche de l'équilibre transitif en termes de demande (totale) excédentaire qui appuie l'existence de l'équilibre sur une variante de l'énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaido-Debreu dont on donne, dans le chapitre, une demonstration directe et originale à partir du théorème de Brouwer. Le cadre de la démonstration est par ailleurs celui

./.

d'une économie d'échange pur, comprenant ℓ biens et m consommateurs, dans laquelle sont introduites des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé de sommet O contenu dans l'orthant négatif de R^{ℓ}. L'application du lemme permet de démontrer l'existence d'un quasi-équilibre. Le passage du quasi-équilibre à l'équilibre nécessite, sous une condition supplémentaire de continuité des préférences des consommateurs, l'adjonction de l'hypothèse forte de survivance des consommateurs ou, alternativement, d'une hypothèse affaiblie de survivance et d'une condition d'irréductibilité de l'économie.

Comme on le voit dans le détail des démonstrations, la convexité des ensembles-images des correspondances de demande repose sur la transitivité et la totalité des préférences de chacun des consommateurs sur son ensemble de consommation. Cette convexité est nécessaire dans l'approche en termes de demande (totale) excédentaire utilisée dans le chapitre I et A. Mas Colell a montré que, pour des préférences non transitives, cette convexité ne pouvait s'obtenir sans un renforcement des autres hypothèses. Les conditions d'existence d'un quasi équilibre et d'un équilibre obtenues dans le chapitre II assurent d'ailleurs la représentabilité de chacun des préordres totaux de préférence par des fonctions d'utilité semi-continues supérieurement, ce qui donne la mesure de la portée des hypothèses qui sont à la base de l'équilibre transitif d'une économie finie.

Remplacer les préordres totaux représentant les préférences des consommateurs par des correspondances de préférence permet d'aborder, sous le nom d'équilibre intransitif, en même temps que les intransitivités possibles dans la comparaison deux à deux des paniers de biens par chacun des consommateurs, un certain nombre d'externalités, comme la dépendance des préférences par rapport aux consommations des autres agents ou par rapport aux prix du marché. La résolution du problème de l'existence de l'équilibre se fait alors par un retour à une approche qui fut initialement celle de Debreu et d'Arrow et Debreu en 1952 et 1954, avant la mise au point du lemme dit de Gale-Nikaido-Debreu : l'approche en terme d'économie abstraite, concept qui généralise celui de jeu non-coopératif.

Le chapitre III appuie ainsi l'existence de l'équilibre, dans une économie d'échange comportant des possibilités de disposition, sur un lemme d'existence d'un quasi-équilibre pour une économie abstraite. La notion de

./.

quasi-équilibre adoptée par une économie abstraite permet de retrouver la notion de quasi-équilibre utilisée dans le chapitre II, quand l'économie abstraite considérée est celle associée à une économie d'échange. L'intérêt du lemme obtenu est de dégager les principes de la démonstration dans un résultat général, susceptible de s'appliquer dans d'autres cadres d'hypothèses que celui choisi pour le chapitre II et le chapitre III. L'existence d'un quasi-équilibre pour l'économie d'échange intransitive est démontrée sous des hypothèses plus faibles ou équivalentes à celles du chapitre II, à l'exception de l'hypothèse de non-saturation des préférences qui doit être renforcée si les préférences des consommateurs dépendent des prix. Le passage du quasi-équilibre à l'équilibre requiert, sous la même condition de continuité des préférences des consommateurs, des hypothèses additionnelles analogues à celles utilisées dans le chapitre II.

Les théorèmes obtenus dans le chapitre III contiennent évidemment les résultats correspondants d'existence d'un quasi-équilibre ou d'un équilibre transitif. L'intérêt du chapitre III est, en effet, de faire apparaître la transitivité des préférences comme une hypothèse totalement superflue pour l'existence de l'équilibre général, dont la suppression accroît le champ des significations possibles des théorèmes d'existence. Il est aussi de montrer qu'une approche alternative de l'équilibre et l'emploi d'un théorème de point fixe plus profond permettent de démontrer ces théorèmes sous des hypothèses affaiblies.

Cet affaiblissement n'est-il pas illusoire ? C'est ce que nous nous demanderons dans une première annexe consacrée aux relations entre les différentes propriétés mathématiques des préférences.

Dans une deuxième annexe intitulée "Equilibre intransitif et optimum", nous nous demanderons dans quelle mesure l'intransivité des préférences est compatible avec le maintien des relations entre équilibre et optimum qui constituent, dans la théorie de l'équilibre général, une des principales raisons d'être de chacune de ces deux notions.

./.

CHAPITRE I

POINTS FIXES ET ELEMENTS MAXIMAUX

I - INTRODUCTION -

Toute démonstration d'existence d'un équilibre général repose sur un théorème de point fixe et les progrès réalisés dans la mise au point de ces démonstrations, l'affaiblissement de leurs hypothèses - et donc l'élargissement du champ des applications possibles des théorèmes d'existence - sont allés de pair avec les progrès accomplis dans la compréhension de la signification des théorèmes de point fixe. Ceci explique sans doute qu'une abondante bibliographie, dont la longueur de la liste des références utilisées pour la rédaction de ce chapitre est un indice, ait densifié un domaine dont les résultats initiaux et fondamentaux sont assez anciens (1) mais qui est aujourd'hui caractérisé par la multiplicité des généralisations des résultats initiaux et le renouvellement et la diversification des méthodes utilisées pour les obtenir.

L'objet de ce chapitre est de mettre en ordre l'ensemble des résultats récents. L'exposé qui sera donné dépasse ainsi les stricts besoins des applications qui en seront faites dans les chapitres II et III et qui, finalement, reposeront seulement sur une variante d'un énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu pour le chapitre II et sur un résultat de Gale et Mas-Colell, perfectionné par Bergstrom et obtenu par sélection à partir du théorème de Kakutani, pour le chapitre III.

D'une part, alors que les chapitres II et III, respectivement consacrés à l'équilibre transitif et intransitif d'une économie comportant un nombre fini de biens et un nombre fini d'agents, utiliseront des théorèmes dans R^{ℓ}, nous avons exposé ici l'ensemble des résultats dans le cadre le plus général dans lequel ils sont obtenus. Raisonner systématiquement dans R^{ℓ} peut obscurcir la portée des conclusions et la raison d'être des hypothèses. Nous avons au contraire eu le double souci de bien distinguer

./.

----

(1) 1929, 1930 et 1935 pour la démonstration du théorème de Brouwer pour un simplexe de R^{ℓ} et ses extensions aux convexes compacts d'un espace de Banach puis d'un espace localement convexe séparé, et 1941, 1950 et 1952 pour le théorème de Kakutani et ses extensions correspondantes.

ce qui n'est valable que dans R^{ℓ} de ce qui reste vrai dans des espaces plus généraux et de suivre pour ces extensions la voie qui mettait le mieux en évidence à partir de quel moment telle ou telle hypothèse devenait nécessaire. Ce chapitre est cependant susceptible d'être "lu" dans R^{ℓ}, pour peu que l'on sache que R^{ℓ} possède toutes les propriétés qui y seront utilisées (R^{ℓ} est un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé, normé, complet, métrisable, etc...). Une telle lecture peut le rendre accessible à un économiste qui aurait lu Nikaïdo (1968) et posséderait ainsi quelques notions sur la convexité et la séparation des ensembles convexes dans R^{ℓ} mais qui ignorerait tout de la topologie générale et des espaces vectoriels topologiques.

D'autre part, s'il ne couvre pas la totalité des théorèmes de point fixe et s'il laisse, en particulier, de côté des résultats qui, tels celui d'Eilenberg-Montgomery, ont été utilisés par les premières démonstrations de l'existence de l'équilibre tant transitif qu'intransitif, cet exposé se veut théorie des théorèmes de points fixes dérivés du théorème de Brouwer et rend compte d'un champ assez large de résultats. Le parti adopté pour cerner le domaine et choisir les techniques de démonstration a été de limiter l'apport de la topologie algébrique à l'énoncé d'un lemme dû à Knaster, Kuratowski et Mazurkiewicz, pris pour point de départ et dont le théorème de Brouwer se déduit immédiatement. La démonstration de ce lemme nécessiterait l'introduction de quelques notions de topologie algébrique, notamment les notions de p-simplexe et de complexe dans R^{ℓ} , faciles à introduire si l'on dispose déjà d'une étude suffisamment détaillée des facettes et des points extrêmaux des polyèdres convexes dans l'espace euclidien de dimension ℓ. Ce lemme, souvent désigné sous le nom du lemme K.K.M., est le seul résultat qui ne sera pas explicitement démontré dans ce chapitre.

Le concept de partition continue de l'unité et les théorèmes qui permettent d'associer une partition continue de l'unité à des recouvrements ouverts d'un espace compact ou paracompact sont l'instrument qui permet l'extension aux correspondances de théorèmes démontrés pour les applications. Cette technique qui est à la base des théorèmes de sélection sera appliquée à diverses reprises dans le chapitre.

./.

On passe ainsi dans le paragraphe II du théorème de Brouwer au théorème de Kakutani dont il suffit ensuite d'étendre la validité aux espaces vectoriels localement convexes séparés pour obtenir le théorème de Kakutani-Fan.

Le paragraphe III indique, pour le passage du théorème de Brouwer au théorème de Kakutani-Fan, un cheminement voisin du précédent mais qui fournit au passage des théorèmes d'existence d'éléments maximaux, fréquemment utilisés dans la théorie de l'équilibre général.

Le paragraphe IV montre comment le théorème de non-séparation de Fan, toujours démontré à partir du théorème de Brouwer, c'est-à-dire, en dernière analyse, à partir du lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, permet d'obtenir, en même temps qu'une généralisation du théorème de Kakutani-Fan, une grande variété d'autres théorèmes qui ont de nombreuses applications. Le lemme dit de Gale-Nikaïdo-Debreu, souvent présenté comme une conséquence du théorème de Kakutani mais dont on a aussi démontré qu'il l'implique, est un cas très particulier de l'un d'entre eux.

Enfin, un cinquième paragraphe est consacré au théorème de sélection et aux applications systématiques que l'on peut en faire pour déduire de nouveaux théorèmes de l'ensemble des théorèmes précédents. La raison d'être de ce paragraphe est le rôle central que jouera dans la démonstration de l'équilibre intransitif un théorème de point fixe démontré par sélection à partir du théorème de Kakutani.

Dans la rédaction des différents paragraphes, nous nous sommes efforcés, afin de situer les différents résultats, de préciser les liens qu'ils entretiennent entre eux. Un diagramme, placé à la fin du chapitre, résumera d'ailleurs les principales implications démontrées dans ce chapitre. Nous espérons ainsi avoir clarifié un domaine qu'il est nécessaire d'avoir bien compris avant d'en aborder les applications.

./.

II. DU LEMME DE KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ AU THEOREME DE KAKUTANI-FAN.

Rappelons tout d'abord l'énoncé du lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz.

Lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz.

Soient $\{a^o, a^1, \ldots, a^p\}$ (p+1) points affinement indépendants de R^ℓ et $F^o, F^1, \ldots, F^p$ une collection de (p+1) sous ensembles fermés de R^ℓ. Si pour tout sous-ensemble $\{i_o, i_1, \ldots, i_r\}$ de l'ensemble d'indices $\{0, 1, \ldots, p\}$, on a :

$$\mathrm{conv}(\{a^{i_o}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\}) \subset \bigcup_{k=0}^{r} F^{i_k},$$

$\mathrm{conv}(a^{i_o}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$ désignant le polyèdre convexe de sommets $a^{i_o}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}$,

alors $$\bigcap_{i=0}^{p} F^i \neq \phi$$

Le théorème de Brouwer s'en déduit presque immédiatement :

Proposition 1 (Théorème de Brouwer).

Si X est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de R^ℓ, toute application continue de X dans lui même admet un *point fixe*, c'est-à-dire un point $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

Démontration

On commencera par démontrer le théorème dans le cas où X est un p - simplexe S_p de R^ℓ, c'est-à-dire le polyèdre convexe engendré par (p+1) points affinement indépendants : $a^o, a^1, \ldots, a^p$. Si $f : S_p \to S_p$ est une application continue, soient F^i, $i = 0, \ldots, p$, les (p+1) sous-ensembles de R^ℓ définis par $F^i = \{x \in S_p / f_i(x) \leq x_i\}$ où x_i et $f_i(x)$ désignent respectivement la $i^{ème}$ coordonnée barycentrique de x et de f(x) par rapport aux

./.

sommets $a^o, a^1, \ldots, a^p$ de S_p. Il résulte de la continuité de f et de la continuité de l'application qui à tout point de la variété linéaire affine engendrée par S_p fait correspondre sa $i^{ème}$ coordonnée barycentrique par rapport aux points $a^o, a^1, \ldots, a^p$, que les F^i sont des sous-ensembles fermés de R^ℓ. D'autre part, si $\{i_o, i_1, \ldots, i_r\}$ est un sous-ensemble de l'ensemble d'indices

$\{0, 1, \ldots, p\}$, tout point x de conv($\{a^{i_o}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\}$) appartient à l'un des F_{i_k} ; si, en effet, on avait : $f_{i_k}(x) > x_{i_k}$, $\forall$ k = 0,..., r, on aurait :

$$\sum_{k=0}^{r} f_{i_k}(x) > \sum_{k=0}^{r} x_{i_k} = 1$$

ce qui serait contraire à l'appartenance à S_p de f(x).

Du lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, on déduit alors l'existence de $x \in \bigcap_{i=0}^{p} F_i(x)$, c'est-à-dire l'existence de x dans S_p tel que : $f_i(x) \leq x_i \; \forall \; i = 0, \ldots, p$, ce qui n'est possible que si f(x) = x.

Si X est un sous-ensemble non vide, convexe, compact quelconque de R^ℓ, soient p sa dimension et S_p un p - simplexe homéomorphe à X par l'homéomorphisme $h : S_p \to X$. Si f est une application continue de X dans X, $h^{-1} \circ f \circ h$ est une application continue de S_p dans S_p. Si $z \in S_p$ est un point fixe de cette application, h(z) est un point fixe de f car : $(h^{-1} \circ f \circ h)(z) = z$ implique f(h(z)) = h(z).

C.Q.F.D.

Le théorème de Kukutani étend l'existence d'un point fixe aux correspondances fermées,à valeurs non vides et convexes d'un sous-ensemble convexe compact X de R^ℓ dans lui-même ou, ce qui revient au même, aux correspondances semi-continues supérieurement(1) à valeurs convexes, fermées de X dans X . Lorsque le convexe compact X est un p - simplexe S_p de R^ℓ, ce théorème peut se démontrer en approchant la correspondance par des fonctions continues construites, par linéarité affine, à partir de valeurs choisies dans les images des sommets des subdivision barycentriques successives du complexe constitué par l'ensemble des facettes du p - simplexe S_p. Le théorème s'étend ensuite par homéomorphisme aux sous-ensembles convexes compacts quelconques de R^ℓ. C'était d'ailleurs la procédure utilisée par S. Kakutani (1951). A cette méthode qui nécessite un nouvel appel aux notions de simplexe et de complexe dans R , nous préfèrerons ici une démonstration adaptée de F. Terkelsen (1974) et qui utilise la notion de partition continue de l'unité.

./.

---

(1) Les définitions, supposées connues, de la fermeture et de la semi-continuité supérieure pour une correspondance définie dans un espace topologique X, à valeurs dans un espace topologique Y, sont rappelées, plus loin, au début du paragraphe IV.

Définition 1.

Etant donnée une famille finie $(A_i)_{i=1...r}$ de parties d'un espace topologique X, on appelle *partition continue de l'unité, faiblement subordonnée à la famille* $(A_i)_{i=1...r}$, toute famille $(f_i)_{i=1...r}$ de fonctions numériques ≥ 0, définies et continues dans X, vérifiant :

- $\forall\ i = 1...r, \quad f_i(x) = 0$ pour $x \notin A_i$

- $\forall\ x \in X \quad , \quad \sum_{i=1}^{r} f_i(x) = 1.$

On appelle *partition continue de l'unité, subordonnée à la famille* $(A_i)_{i=1...r}$, toute famille $(f_i)_{i=1...r}$, de fonctions numériques ≥ 0, définies et continues dans X, vérifiant :

- $\forall\ i = 1,..., r$, $\text{supp}(f_i) \subset A_i$

où $\text{supp}(f_i)$ désigne le *support* de la fonction f_i, c'est-à-dire l'adhérence dans X de l'ensemble des $x \in X$ tels que $f_i(x) \neq 0$,

- $\forall\ x \in X, \quad \sum_{i=1}^{r} f_i(x) = 1.$

L'existence pour un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i \in J}$ (J ensemble d'indices fini) d'un espace topologique compact X d'une partition continue *subordonnée* à ce recouvrement est un résultat classique de topologie générale. Nous utiliserons le plus souvent ci-dessous l'existence d'une partition continue de l'unité *faiblement subordonnée* au recouvrement fini, résultat plus faible et de démonstration immédiate si X est un espace métrique(1) (donc, par exemple, si X est un sous ensemble compact de R^{ℓ}).

Proposition 2 (Théorème de Kakutani)

Si X est un sous ensemble non vide, convexe et compact de R^{ℓ}, toute correspondance $\varphi : X \to X$, semi-continue supérieurement sur X et à valeurs non vides convexes et fermées, admet un *point fixe* c'est-à-dire un point $x \in X$, tel que $x \in \varphi(x)$.

./.

---

(1) Si d est la distance sur X, il suffit, en effet, de poser pour tout $i \in J$: $\alpha_i(x) = d(x, X \backslash U_i)$ et $\beta^i(x) = \dfrac{\alpha^i(x)}{\sum_{i \in J} \alpha^i(x)}$. La famille $(\beta_i)_{i \in J}$ est une partition continue de l'unité, faiblement subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in J}$

Démonstration

Soit un recouvrement de X par la famille des boules ouvertes centrées en un point x de X et de rayon ε. Puisque X est compact, il existe $x_\varepsilon^1, x_\varepsilon^2, \ldots, x_\varepsilon^{r_\varepsilon}$ dans X tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{r_\varepsilon} B_0(x_\varepsilon^i, \varepsilon)$ et il existe une partition continue de l'unité $(\alpha_\varepsilon^i)_{i=1\ldots r_\varepsilon}$ faiblement subordonnée au recouvrement $(X \cap B_0(x_\varepsilon^i, \varepsilon))_{i=1\ldots r_\varepsilon}$ de X. Si on choisit $\forall\ i = 1\ldots r_\varepsilon$, $y_\varepsilon^i \in \varphi(x_\varepsilon^i)$, on peut définir une fonction f_ε, continue, de X dans lui même :

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{r_\varepsilon} \alpha_\varepsilon^i(x)\ y_\varepsilon^i$$

Soit, en vertu du théorème de Brouwer, x^ε un point fixe de f_ε. On a les relations :

$$x^\varepsilon = \sum_{i=1}^{r_\varepsilon} \alpha_\varepsilon^i(x^\varepsilon)\ y_\varepsilon^i \quad \text{et} \quad \alpha_\varepsilon^i(x^\varepsilon) \neq 0 \Rightarrow x^\varepsilon \in B_0(x_\varepsilon^i, \varepsilon) \cap X.$$

Soit alors (ε_n) une suite de nombres positifs, décroissants et tendant vers 0 et (x^{ε_n}) la suite des points fixes des fonctions f_{ε_n} que l'on peut définir par la procédure qui vient d'être exposée. Puisque X est compact, on peut supposer que la suite (x^{ε_n}) tend vers $x^0 \in X$. On va montrer que x^0 est un point fixe de la correspondance φ.

Si, en effet, x^0 n'appartient pas à l'ensemble convexe fermé $\varphi(x^0)$, il résulte du 2ième théorème de séparation dans R^ℓ (possibilité de séparer strictement par un hyperplan un ensemble convexe fermé et un ensemble convexe compact) qu'il existe $p \in R^\ell$ et $\alpha \in R$ tels que :

$$p.x^0 < \alpha \quad \text{et} \quad p.z > \alpha \qquad \forall\ z \in \varphi(x^0).$$

Puisque la correspondance φ est semi-continue supérieurement, il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $x \in B_0(x^0, \varepsilon) \Rightarrow p.z > \alpha \quad \forall\ z \in \varphi(x)$.

Soit alors n_0 tel que $n > n_0 \Rightarrow \varepsilon^n < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x^{\varepsilon_n}, x^0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $n > n_0$, on a : $x^{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^{r_{\varepsilon_n}} \alpha_{\varepsilon_n}^i(x^{\varepsilon_n})\ y_{\varepsilon_n}^i$ avec $y_{\varepsilon_n}^i \in \varphi(x_{\varepsilon_n}^i)$ et

./.

$$\alpha^i_{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}) \neq 0 \Rightarrow x^{\varepsilon_n} \in B_o(x^i_{\varepsilon_n}, \varepsilon^n) \cap X \Rightarrow$$

$$d(x^i_{\varepsilon_n}, x^o) \leqslant d(x^i_{\varepsilon_n}, x^{\varepsilon_n}) + d(x^{\varepsilon_n}, x^o) < \varepsilon^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On en déduit : $\forall\ n > n_o,\ \alpha^i_{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}) \neq 0 \Rightarrow p.z > \alpha\ ,\ \forall\ z \in \varphi(x^i_{\varepsilon_n}) \Rightarrow p.y^i_{\varepsilon_n} > \alpha$.

de sorte que : $\forall\ n > n_o,\ p.x^{\varepsilon_n} > \alpha$.

Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient $p.x^o \geqslant \alpha$, ce qui est contradictoire avec $p.x^o < \alpha$.

C.Q.F.D.

Le théorème de Kakutani-Fan[1] étend le théorème de Kakutani aux correspondances définies et à valeurs dans un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique réel, localement convexe séparé. La démonstration de cette extension est empruntée à C. Berge (1959).

Proposition 3 (Théorème de Kakutani-Fan)

Soient E un espace localement convexe séparé et X un sous-ensemble convexe compact de E. Toute correspondance $\varphi : X \to X$, semi-continue supérieurement et à valeurs non vides, convexes, fermées admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x \in X$ vérifiant $x \in \varphi(x)$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{V}$ le système fondamental de voisinages de 0 dans E, formé des voisinages de 0 qui sont convexes, symétriques et fermés. On va commencer par montrer l'existence pour tout V de $\mathcal{V}$ d'un point x_V dans $(\varphi(x) + V)$.

Soit, en effet, $V \in \mathcal{V}$. Puisque X est compact, il existe

./.

----

(1) Cf. Ky Fan (1952) et aussi Glicksberg (1952).

un recouvrement ouvert fini de X : $X \subset \bigcup_{i=1}^{r_V} (\{x_V^i\} + \overset{o}{V})$ et une partition de l'unité $(\alpha_V^i)_{i=1\ldots r_V}$ faiblement subordonnée au recouvrement $(X \cap (\{x_V^i\} + \overset{o}{V}))_{i=1\ldots r_V}$

Désignons par K_V le polyèdre convexe engendré par $\{x_V^1, x_V^2, \ldots, x_V^{r_V}\}$ et par Ψ_V la correspondance : $K_V \to K_V$, définis par : $\Psi_V(x) = K_V \cap (\varphi(x) + V)$.

Par construction, la correspondance Ψ_V est à valeurs convexes et fermées.

Si $y \in \varphi(x)$, $\sum_{i=1}^{r_V} \alpha_V^i(y)\, x_V^i \in K_V \cap (\varphi(x) + V)$ puisque

$\alpha_V^i(y) \neq 0 \Rightarrow y \in \{x_V^i\} + \overset{o}{V} \Rightarrow x_V^i \in \varphi(x) + V$; la correspondance Ψ_V est donc à valeurs non vides.

Enfin, puisque Ψ_V est définie sur un compact et à valeurs dans un compact, pour démontrer la semi-continuité supérieure de Ψ_V, nous allons vérifier que le graphe G_{Ψ_V} de Ψ_V est fermé.

Soit (x, y) un point adhérent à G_{Ψ_V} dans $K_V \times K_V$.
Puisque la topologie induite par la topologie de E sur la variété linéaire affine de dimension finie engendrée par K_V coïncide avec la topologie euclidienne usuelle, il existe deux suites (x^n) et (y^n) de points de K_V, convergeant respectivement vers x et y et vérifiant :

$$\forall \text{ n entier, } x^n \in K_V \text{ et } y^n \in K_V \cap (\varphi(x^n) + V).$$

On peut écrire $y^n = z^n + t^n$ avec $z^n \in \varphi(x^n)$ et $t^n \in V$.

Puisque X est un sous-ensemble compact de E et, en remplaçant éventuellement la suite (z^n) par une suite partielle extraite de (z^n) et convergeant vers un point $z \in X$, on a : $t^n \to t \in V$, $z^n \to z \in \varphi(x)$ et $y = z + t \in (K_V \cap (\varphi(x) + V))$, ce qui montre que $(x, y) \in G_{\Psi_V}$ et que G_{Ψ_V} est fermé.

./.

Toujours parce que K_V est de dimension finie et peut ainsi être plongé dans un espace euclidien, on peut appliquer à Ψ_V le théorème de Kakutani : il existe $x_V \in \Psi_V(x_V) = K_V \cap (\varphi(x_V) + V)$.

A tout V de $\mathcal{V}$, associons maintenant le sous-ensemble X :
$F_V = \{x \in X/x \in \varphi(x) + V\}$.

Si $x \notin F_V$, c'est-à-dire si le sous-ensemble compact $\{x\}$ et le sous-ensemble fermé $(\varphi(x) + V)$ de E sont disjoints, puisque E est localement convexe, il existe U et W $\in \mathcal{V}(o)$ tels que :

$$(\{x\} + U) \cap (\varphi(x) + V + W) = \phi$$

Puisque φ est semi-continue supérieurement, soit $U' \in \mathcal{V}(o)$ tel que :

$$x' \in \{x\} + U' \Rightarrow \varphi(x') \subset \varphi(x) + W$$

$x' \in (\{x\} + (U \cap U')) \Rightarrow x' \notin \varphi(x') + V$, ce qui montre que F_V est fermé.

Il résulte d'autre part de ce qui a été démontré plus haut que $F_V \neq \phi$ et que toute intersection finie :

$F_{V^1} \cap \ldots \cap F_{V^r} = \{x \in X/x \in \bigcap_{i=1}^{r} (\varphi(x) + V^i)\}$, puisqu'elle contient

$\{x \in X/x \in \varphi(x) + \bigcap_{i=1}^{r} V^i\}$, est non vide. Appliquant à l'ensemble compact X la propriété d'intersection finie des sous-ensembles fermés de X, on obtient :

$$\exists\, x \in X,\ x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (\varphi(x) + V)$$

Enfin, puisque $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans E et par séparation d'un fermé et d'un compact dans un espace localement convexe, on en déduit : $x \in \varphi(x)$.

C.Q.F.D.

III. DU LEMME DE KY-FAN AU THEOREME DE KAKUTANI-FAN.

Le lemme K.K.M., qui a permis dans le paragraphe II de démontrer le théorème de Brouwer, associe aux (p+1) sommets d'un p - simplexe de R^ℓ une famille de sous-ensembles fermés de R^ℓ dont l'intersection est non vide

./.

si chacune des facettes du simplexe est contenue dans la réunion des fermés d'indices correspondant aux indices des sommets de la facette. Il est possible de donner de ce résultat une formulation, désignée sous le nom de lemme de Ky-Fan,[1] qui remplace R^{ℓ} par un espace vectoriel topologique quelconque E et les (p+1) points affinement indépendants dans R^{ℓ} par un sous-ensemble quelconque de E.

Proposition 4 (Lemme de Ky-Fan).

Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique E et soit, pour tout x de X, F(x) un sous-ensemble fermé de E. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout sous-ensemble fini $\{x^1, x^2, \dots, x^p\}$ de X, l'enveloppe convexe des points $x^1, \dots, x^p$ vérifie :

$$\text{conv}(\{x^1, x^2, \dots, x^p\}) \subset \bigcup_{i=1}^{p} F(x^i)$$

- il existe $z \in X$ tel que F(z) soit compact

alors : $\bigcap_{x \in X} f(x) \neq \phi$.

Démonstration.

Puisque l'un des F(x) est compact, il suffit de démontrer que toute intersection finie $\bigcap_{i=1}^{r} f(x^i)$ est non vide.

Pour cela, soit S^{r-1} le (r-1) simplexe de $R^{\ell}/(\ell \geq r)$ qui a pour sommet les r premiers vecteurs de la base naturelle de R^{ℓ} : $e^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e^{\ell} = (0, 0, \dots, 1)$. La fonction $h : S^{r-1} \to E$, qui a tout point $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e^i$ ($\alpha_i \geq 0$, $i=1,\dots,r$ et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$) de S^{r-1}

./.

---

(1) Cf. Ky Fan (1961).

fait correspondre le point : $h(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e^i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$, est continue et les ensembles $G^i = h^{-1}(F(x^i))$ sont des sous-ensembles fermés de R^ℓ. Pour tout sous-ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ de l'ensemble d'indices $\{1,\ldots,r\}$

$$\text{conv}\,((e^{i_j})_{j=1,\ldots,q}) \subset \bigcup_{j=1}^{q} G^{i_j} \quad \text{car}$$

$$z \in \text{conv}\,((e^{i_j})_{j=1\ldots q}) \Rightarrow h(z) \in \text{conv}\,((x^{i_j})_{j=1\ldots q}) \subset \bigcup_{j=1}^{q} F(x^{i_j})$$

$$\Rightarrow z \in h^{-1}(\bigcup_{j=1}^{q} F(x^{i_j})) \subset \bigcup_{j=1}^{q} h^{-1}(F(x^{i_j})).$$

Il résulte donc du lemme K.K.M. : $\bigcap_{i=1}^{r} G^i \neq \phi$, d'où l'on déduit :

$\bigcap_{i=1}^{r} F(x^i) \neq \phi$. C.Q.F.D.

La démonstration de la proposition 4 contient implicitement le résultat suivant, signalé par Sonnenschein (1971) :

Corollaire (Sonnenschein).

Soient $\{a^0, a^1, \ldots, a^p\}$ (p+1) points de R^ℓ (non nécessairement affinement indépendants) et $F^0, F^1, \ldots, F^p$ une collection de (p+1) sous-ensembles fermés de R^ℓ. Si pour tout sous-ensemble $\{i_0, i_1, \ldots, i_r\}$ de l'ensemble d'indices $\{0, 1, \ldots, p\}$, on a :

$$\text{conv}(\{a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\}) \subset \bigcup_{k=0}^{r} F^{i_k}$$

alors $\bigcap_{i=0}^{p} F^i \neq \phi$.

Le lemme de Ky-Fan permet une démonstration immédiate de la proposition 5.

./.

Proposition 5 (Browder-Fan)[1].

Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé (non nécessairement localement convexe).
Toute correspondance φ: $X \to X$ à valeurs convexes, non vides, vérifiant l'hypothèse de continuité suivante :

$$\forall\ y \in X,\ \varphi^{-1}(y) \text{ est ouvert dans } X$$

admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x \in X$ tel que $x \in \varphi(x)$.

Démonstration.

Supposons que φ n'admette pas de point fixe.

Pour tout $y \in X$, posons $F(y) = \complement_X \varphi^{-1}(y)$. Quel que soit y, F(y) est un sous-ensemble fermé de l'espace topologique compact X. Soient d'autre part $\{y^1, y^2, \ldots, y^p\}$ un sous-ensemble fini de X et $z \in \text{conv}(\{y^i\}_{i=1\ldots p})$. Si z n'appartenait pas à $\bigcup_{i=1}^{p} F(y^i)$, on aurait : $\forall\ i = 1, \ldots, p,\ z \in \varphi^{-1}(y^i)$, c'est-à-dire $\forall\ i = 1, \ldots, p,\ y^i \in \varphi(z)$ et, par convexité de $\varphi(z)$, $z \in \varphi(z)$, ce qui serait contraire à l'hypothèse faite sur φ. Les deux hypothèses du lemme de Ky-Fan sont donc vérifiées et $\bigcap_{y \in X} F(y) \neq \phi$. Soit alors $x \in \bigcap_{y \in X} F(y)$; $\varphi(x) = \phi$. On aboutit ainsi à une contradiction.

C.Q.F.D.

Dans la littérature économique, la correspondance φ est parfois interprétée comme une correspondance sur X faisant correspondre à tout x de X le sous-ensemble $\varphi(x)$ des éléments de X qui sont (strictement) préférés à x. L'absence de point fixe paraissant une hypothèse raisonnable pour une correspondance de préférence (irréflexivité de la préférence stricte), la proposition 5 peut alors être interprétée comme un théorème d'existence d'un élément maximal, c'est-à-dire d'un élément x tel que $\varphi(x) = \phi$.

./.

(1) Le résultat apparaît pour la première fois, sous une forme différente et avec une hypothèse de continuité plus forte (le graphe de φ est ouvert dans X x X) dans Ky-Fan (1961). On trouve l'énoncé de la proposition 5 dans Browder (1968) et Ky-Fan (1972).

. La dualité des significations du résultat apparaît dans le corollaire suivant qui renforce légèrement l'énoncé, comme le permet la démonstration qui a été donnée de la proposition 5.

Corollaire 1 (Bergstrom (1975))

Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé E. Pour toute correspondance : X → X vérifiant l'hypothèse de continuité : $\forall\ y \in X, \varphi^{-1}(y)$ est ouvert dans X, ou il existe $\bar{x} \in \mathrm{conv}(\varphi(\bar{x}))$, ou il existe $\bar{\bar{x}}$ tel que $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \phi$.

Il est intéressant de noter que l'on peut, en suivant Browder (1968), donner du corollaire de la proposition 5 une démonstration directe à partir du théorème de Brouwer.

Démonstration.

Supposons que pour tout $x \in X, \varphi(x) \neq \phi$.

Considérons la correspondance $\Psi : X \to X$ définie par $\Psi(x) = \mathrm{conv}(\varphi(x))$. On a évidemment : $\forall\ x \in X, \Psi(x) \neq \phi$. Si d'autre part, $y \in X$ et $x \in \Psi^{-1}(y)$, on a : $y = \sum_{i=1}^{p} \alpha^i y^i$ avec $y^i \in \varphi(x)$ et $\alpha_i \geq 0$, $\forall$ i = 1,..., p,et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$; chacun des $\varphi^{-1}(y^i)$ étant ouvert

dans X, $\bigcap_{i=1}^{p} \varphi^{-1}(y^i)$ est ouvert dans X, contient x et vérifie :

$$x' \in \bigcap_{i=1}^{p} \varphi^{-1}(y^i) \Rightarrow y \in \Psi(x') \quad \text{c'est-à-dire } x' \in \Psi^{-1}(y).$$

Les $(\Psi^{-1}(y))_{y \in X}$ constituent ainsi un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire, puisque X est compact, un recouvrement fini :

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \Psi^{-1}(y^i).$$

./.

Soit $(\alpha^i)_{i=1...r}$ une partition continue de l'unité faiblement subordonnée à ce recouvrement. Désignons par K le polyèdre convexe engendré par les points $y^1, y^2, \dots, y^r$ et par $p : K \to K$ la fonction continue définie par : $p(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i(x)\, y^i$.

Puisque la topologie induite par la topologie de E sur la variété linéaire affine de dimension finie engendrée par K coïncide avec la topologie euclidienne usuelle, on peut appliquer à p le théorème de Brouwer. Il existe $\bar{x} \in K$, tel que $\bar{x} = p(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i(\bar{x})\, y^i$.

$$\alpha^i(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} \in \Psi^{-1}(y^i) \Rightarrow y^i \in \Psi(\bar{x}) = \mathrm{conv}(\varphi(\bar{x})).$$

On en déduit : $\bar{x} \in \mathrm{conv}(\varphi(\bar{x}))$.

C.Q.F.D.

On peut enfin, comme le font Borglin et Keiding (1976) renforcer le résultat du corollaire 1 comme théorème d'existence d'un élément maximal, puis en déduire une démonstration du théorème de Kakutani-Fan.

Définition 2.

Une correspondance $\varphi : X \to X$ est dite *Ky-Fan majorée* s'il existe une correspondance $\Psi : X \to X$ vérifiant les hypothèses :

$\forall z \in X,\ z \notin \mathrm{conv}\ \Psi(z)$ (1)

$\forall y \in X,\ \Psi^{-1}(y)$ est un sous-ensemble ouvert de X. (2)

et telle que pour tout x de X on ait : $\varphi(x) \subset \Psi(x)$.

La correspondance Ψ qui majore φ est alors dite K-F.

./.

Définition 3.

Une correspondance $\varphi : X \to X$ est dite *localement Ky-Fan majorée* si, pour tout x de X tel que $\varphi(x) \neq \phi$ il existe un voisinage ouvert U_x de x et une correspondance $\Psi_x : X \to X$ vérifiant les hypothèses (1) et (2) de la définition 2 et telle que pour tout z de U_x on ait : $\varphi(z) \subset \Psi_x(z)$.

Naturellement, si une correspondance φ est Ky-Fan majorée, il existe alors, en vertu du corollaire 1 de la proposition 5, un élément $\overline{x}$ de X tel que $\varphi(\overline{x}) = \phi$. Le corollaire suivant montre qu'il en est de même pour une correspondance localement Ky-Fan majorée[(1)].

Corollaire 2 (Borglin-Keiding).

Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé. Pour toute correspondance φ de X dans X, *localement Ky-Fan majorée*, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\varphi(\overline{x}) = \phi$.

Démonstration.

Supposons en effet que $\varphi(x) \neq \phi$ pour tout x de X.

Les voisinages ouverts (dans X) U_x de x associés aux correspondances Ψ_x qui majorent dans U_x la correspondance φ, constituent alors, un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire, puisque X est compact, un recouvrement fini : $X = \bigcup_{i=1}^{r} U_{x^i}$. Soit (α^i) une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_{x^i})_{i=1\ldots r}$. Les supports $F^i = \text{supp}(\alpha^i) = \{x \in X / \alpha^i(x) > 0\}$ de chacune des fonctions α^i constituent un recouvrement fermé de X : $X = \bigcup_{i=1}^{r} F^i$ vérifiant : $\forall\, i = 1,\ldots,r$, $F^i \subset U_{x^i}$.

./.

----

(1) Borglin et Keiding (1976) montrent d'ailleurs que si X est un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique *métrisable*, toute correspondance localement Ky-Fan majorée est globalement Ky-Fan majorée.

Soient alors les correspondances suivantes définies sur X et à valeurs dans X :

$$\Psi^{i}(x) = \begin{cases} \Psi_{x^i}(x) & \text{si} \quad x \in F^{i} \\ X & \text{si } x \notin F^{i} \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \bigcap_{i=1}^{r} \Psi^{i}(x).$$

Chacune des correspondances Ψ^{i} vérifie la condition de continuité de la proposition 5 ou de son corollaire 1.

Soient en effet, $y \in X$ et $x \in (\Psi^{i})^{-1}(y)$.

Si $x \notin F^{i}$, $\complement_X F^{i}$ est un voisinage ouvert (dans X) de x et $x' \in \complement_X F^{i} \Rightarrow \Psi^{i}(x') = X \Rightarrow x' \in (\Psi^{i})^{-1}(y)$.

Si $x \in F^{i}$, $(U_{x^i} \cap (\Psi_{x^i})^{-1}(y))$ est un voisinage (dans X) de x et $x' \in (U_{x^i} \cap (\Psi_{x^i})^{-1}(y)) \Rightarrow \Psi^{i}(x') = \Psi_{x^i}(x')$ ou X, selon que x' appartient ou n'appartient pas à F^{i}. Dans les deux cas, $x' \in (\Psi^{i})^{-1}(y)$.

Il en est de même de la correspondance Ψ car si $y \in X$,
$$\Psi^{-1}(y) = \bigcap_{i=1}^{r} (\Psi^{i})^{-1}(y).$$

Enfin il n'existe pas d'élément $\bar{x}$ appartenant à conv$(\Psi(\bar{x}))$, car $\bar{x} \in \text{conv}(\Psi(\bar{x})) \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{\bar{x} \in F^i} \text{conv}(\Psi_{x^i}(\bar{x}))$, ce qui contredit les propriétés de la correspondance Ψ_{x^i} pour i tel que $\bar{x} \in F^{i}$.

On déduit alors du corollaire 1 de la proposition 5 l'existence de $\bar{\bar{x}}$ tel que : $\Psi(\bar{\bar{x}}) = \bigcap_{\bar{\bar{x}} \in F^i} \Psi_{x^i}(\bar{\bar{x}}) = \phi$.

Puisque $\bar{\bar{x}} \in F^{i}$ implique $\varphi(\bar{\bar{x}}) \subset \Psi_{x^i}(\bar{\bar{x}})$, il en résulte $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \phi$, contrairement à l'hypothèse faite sur φ.

C.Q.F.D.

./.

Corollaire 3 (Kakutani-Fan)

Soit E un espace localement convexe séparé et X un sous-ensemble convexe compact de E. Pour toute correspondance $\varphi : X \to X$, semi-continue supérieurement et à valeurs convexes fermées, ou il existe $\bar{x} \in \varphi(\bar{x})$, ou il existe $\bar{\bar{x}}$ tel que $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \phi$.

Démonstration.

Il suffit de vérifier que si pour tout x de X, $x \notin \varphi(x)$, φ est alors localement Ky-Fan majorée.

Supposons, en effet, que pour tout x de X, $x \notin \varphi(x)$, et soit x dans X tel que $\varphi(x) \neq \phi$. Puisque E est localement convexe et puisque $\varphi(x)$ est fermé, il existe U'_x, voisinage ouvert (dans X), de x et V_x voisinage convexe de O tels que :

$$x' \in U'_x \Rightarrow x' \notin \varphi(x) + V_x.$$

D'autre part, puisque φ est semi-continue supérieurement sur X, il existe U''_x, voisinage ouvert de x, tel que :

$$x' \in U''_x \Rightarrow \varphi(x') \subset \varphi(x) + V_x$$

Pour chaque x de X tel que $\varphi(x) \neq \phi$, la correspondance est ainsi majorée, dans le voisinage $(U'_x \cap U''_x)$ de x, par la correspondance $\Psi_x : X \to X$ définie par $\Psi_x(x) = \varphi(x) + V_x$, correspondance qui satisfait aux hypothèses (1) et (2) de la définition 2.

On déduit alors du corollaire 2 l'existence de $\bar{\bar{x}}$ dans X tel que $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \phi$.

C.Q.F.D.

./.

IV. LE THEOREME DE NON SEPARATION ET SES CONSEQUENCES

Avant d'établir des théorèmes de point fixe plus forts que le théorème de Kakutani-Fan, revenons sur la définition de la continuité pour une correspondance.

Soient E et F deux espaces topologiques et φ une correspondance définie sur E et à valeurs dans F.

Rappelons qu'on dit que φ est *semi-continue supérieurement (en abrégé s.c.s.) au point* x^0 *de* E si pour tout ouvert V dans F contenant $\varphi(x^0)$, il existe un voisinage de x^0, $U \in \mathcal{V}(x^0)$ tel que :

$$x \in U \Rightarrow \varphi(x) \subset V$$

φ est dite *s.c.s. sur* E si φ est s.c.s. en tout point de E.

On dit également que φ est *fermée* sur E si son graphe $G_\varphi = \{(x, y) \in E \times F \;/\; y \in \varphi(x)\}$ est un sous-ensemble fermé de $E \times F$.

Les propriétés de la semi-continuité supérieure des correspondances sont classiques et établies dans Berge (1959). Essentiellement, si φ est à valeurs fermées dans un sous-ensemble compact Y de F, les propriétés pour φ d'être s.c.s. et fermée sont équivalentes. Si φ est s.c.s. et à valeurs compactes, et si X est un sous-ensemble compact de E, $\varphi(X)$ est un sous-ensemble compact de F.

Lorsque F est un espace vectoriel topologique séparé, on peut introduire les deux définitions suivantes dont la première est due à Ky Fan (1969) et la deuxième à Cornet (1975).

Définition 2.

On dit que φ est *demi-continue supérieurement (d.c.s.) au point* x^0 *de* E si pour tout demi-espace ouvert W de F contenant $\varphi(x^0)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(x^0)$ tel que : $x \in U \Rightarrow \varphi(x) \subset W$.

./.

Autrement dit, φ est demi-continue supérieurement au point x^o si pour toute forme linéaire continue p sur F et pour tout nombre réel α tel que $p(y) < \alpha \quad \forall\, y \in \varphi(x^o)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(x^o)$ tel que $x \in U \Rightarrow p(y) < \alpha \quad \forall\, y \in \varphi(x)$ (ou encore si pour toute forme linéaire continue p sur F et pour tout nombre réel β tel que $p(y) > \beta \quad \forall\, y \in \varphi(x^o)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(x^o)$ tel que $x \in U \Rightarrow p(y) > \beta \quad \forall\, y \in \varphi(x)$).

Définition 3.

On dit que φ est *hémi-continue supérieurement (h.c.s.) au point x^o de E* si pour toute forme linéaire continue p sur F et pour tout nombre réel α tels que $\sup\limits_{y\in\varphi(x^o)} p(y) < \alpha$ (resp. pour tout nombre réel β tel que $\inf\limits_{y\in\varphi(x^o)} p(y) > \beta$) il existe $U \in \mathcal{V}(x^o)$ tel que : $x \in U \Rightarrow$ $\sup\limits_{y\in\varphi(x)} p(y) < \alpha$ (resp. $\inf\limits_{y\in\varphi(x)} p(y) > \beta$).

Autrement dit φ est hémi-continue supérieurement au point x^o de E si et seulement si pour toute forme linéaire continue p sur F la fonction réelle $x \to \sigma_p(x) = \sup\limits_{y\in\varphi(x)} p(y)$ est semi-continue supérieurement au point x^o (ou encore si la fonction réelle $x \to \tau_p(x) = \inf\limits_{y\in\varphi(x)} p(y)$ est semi-continue inférieurement au point x^o).

On notera que si deux correspondances définies sur E et à valeurs dans F sont h.c.s. au point x^o, il en est de même de la correspondance $\lambda\,\varphi + \mu\,\Psi$, pour λ et μ réels. On a, en effet :

$$\sup_{y\in(\lambda\varphi+\mu\Psi)(x)} p(y) = \sup_{y\in\varphi(x)} \lambda\, p(y) + \sup_{y\in\Psi(x)} \mu\, p(y)$$

et la semi-continuité supérieure de la fonction $x \to \sup\limits_{y\in(\lambda\varphi+\mu\Psi)(x)} p(y)$ résulte de la semi-continuité supérieure des fonctions

$$x \to \sup_{y\in\varphi(x)} \lambda\, p(y) \quad \text{et} \quad x \to \sup_{y\in\Psi(x)} \mu\, p(y).$$

./.

Bien entendu, φ est dite *demi-continue supérieurement* (resp. *hémi-continue supérieurement*) sur E si φ est demi-continue supérieurement (resp. hémi-continue supérieurement) en tout point x de E .

Il ressort de l'énoncé même des définitions que la semi-continuité supérieure implique la demi-continuité supérieure et que la demi-continuité supérieure implique l'hémi-continuité supérieure.

Si φ est à valeurs compactes, les deux notions de demi-continuité et d'hémi-continuité coïncident.

Enfin si F est localement convexe et si φ est h.c.s. à valeurs convexes fermées dans un sous-ensemble compact fixe de F, φ est s.c.s.

La proposition que nous allons établir est une variante d'un théorème de Ky Fan (1972) qui l'établit pour des correspondances demi-continues. Nous allons démontrer le même résultat pour des correspondances hémi-continues au prix d'un renforcement des hypothèses faites sur les images de ces correspondances.

Rappelons auparavant que deux ensembles A et B d'un espace vectoriel topologique E sont dits *séparés par un hyperplan fermé* s'il existe une forme linéaire continue p sur E et un nombre réel α tels que :

$$p(x) \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \quad \text{et} \quad p(y) \geq \alpha \quad \forall\, y \in B$$

A et B sont dits *strictement séparés par un hyperplan fermé* s'il existe une forme linéaire continue p sur E et un nombre réel α tels que :

$$p(x) < \alpha \quad \forall\, x \in A \quad \text{et} \quad p(y) > \alpha \quad \forall\, y \in B$$

<u>Proposition 6</u>. <u>(Théorème de non-séparation)</u>

Soient X un sous-ensemble non vide convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé E et φ et Ψ deux correspondances h.c.s. définies sur X dont l'une est à valeurs non vides dans E et l'autre à valeurs non vides compactes dans E et qui vérifient en outre la condition suivante :
pour toute forme linéaire continue p sur E et pour tout x de $A(X, p) = \{x \in X \ / \ p(x) = \max\limits_{y \in X} p(y)\}$, il existe $u \in \varphi(x)$ et $v \in \Psi(x)$ tels que $p(u) \leq p(v)$.

Alors il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\varphi(\overline{x})$ et $\Psi(\overline{x})$ ne puissent pas être séparés strictement par un hyperplan fermé.

Démonstration.

Supposons la conclusion fausse.

Puisque l'une des deux correspondances est à valeurs compactes, quel que soit $x \in X$ il existe une forme linéaire continue p sur E telle que $\sup_{y \in \Psi(x)} p(y) < \inf_{y \in \varphi(x)} p(y)$.

Pour toute forme linéaire continue p, posons

$$V(p) = \{z \in X \,/\, \sup_{y \in \Psi(z)} p(y) < \inf_{y \in \varphi(z)} p(y)\}.$$

Il résulte de ce qui précède et de l'hémi-continuité supérieure de φ et de Ψ que les $V(p)$ forment un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire, puisque X est compact, un recouvrement fini : $V(p^1)$, $V(p^2)$, ..., $V(p^r)$. Soit $(\alpha^i)_{i=1,\dots,r}$ une partition continue de l'unité faiblement subordonnée au recouvrement $(V(p^i))_{i=1,\dots,r}$.

Définissons une correspondance $\xi : X \to X$ par :

$$\xi(x) = \{ y \in X \,/\, \sum_{i=1}^{r} \alpha^i(x)\, p^i(y - x) > 0\}$$

ξ est à valeurs convexes et il résulte de la continuité des α^i et des p^i que, pour tout y de Y, $\xi^{-1}(y) = \{x \in X \,/\, \sum_{i=1}^{r} \alpha^i(x)\, p^i(y - x) > 0\}$ est ouvert dans X. Par construction, ξ n'admet pas de point fixe. Il résulte alors du corollaire 1 de la proposition 5 qu'il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\xi(\overline{x}) = \phi$, c'est-à-dire tel que :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i(\overline{x})\, p^i(y - \overline{x}) \le 0, \quad \forall\, y \in X.$$

Si on pose $\overline{p} = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i(\overline{x})\, p^i$, on en déduit : $\overline{x} \in A(X, \overline{p})$.

Soient alors, conformément à l'hypothèse faite dans l'énoncé de la proposition 6, $u \in \varphi(\overline{x})$ et $v \in \Psi(\overline{x})$ tels que : $\overline{p}(u) \le \overline{p}(v)$.

./.

$$\alpha^j(\bar{x}) \neq 0 \Longrightarrow \bar{x} \in V(p^i) \Longrightarrow \sup_{y \in \Psi(\bar{x})} p^i(y) < \inf_{y \in \varphi(\bar{x})} p^i(y)$$

d'où l'on déduit : $\bar{p}(v) \leq \sup_{y \in \Psi(\bar{x})} \bar{p}(y) < \inf_{y \in \varphi(\bar{x})} \bar{p}(y) \leq \bar{p}(u)$

On aboutit ainsi à une contradiction.

C.Q.F.D.

Puisque dans un espace localement convexe, un ensemble convexe fermé non vide et un ensemble convexe compact non vide, s'ils sont disjoints, peuvent toujours être strictement séparés par un hyperplan fermé, on déduit immédiatement de la proposition 6 la proposition suivante.

<u>Proposition 7</u>.

Soient X un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace localement convexe séparé E et φ et Ψ deux correspondances : $X \to E$, h.c.s., dont l'une est à valeurs non vides convexes fermées et l'autre à valeurs non vides, convexes, compactes et qui vérifient en outre la condition suivante :

Pour toute forme linéaire continue p sur E et pour tout x de $A(X, p) = \{x \in X \,/\, p(x) = \max_{y \in X} p(y)\}$ il existe $u \in \varphi(x)$ et $v \in \Psi(x)$ tels que : $p(u) \leq p(v)$.

Alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $\varphi(\bar{x}) \cap \Psi(\bar{x}) \neq \phi$.

Les différents corollaires de la proposition 7 seront obtenus en particularisant l'une des correspondances φ ou Ψ .

Si l'on identifie φ ou Ψ à l'application identique de X , on obtient une variante h.c.s. d'un théorème de Ky Fan (1972) dont le théorème de Kakutani-Fan est un cas particulier.

Pour l'énoncer, nous devons introduire deux définitions qui explicitent pour la deuxième correspondance la condition de la proposition 7 dans chacun des cas $\Psi = I_X$ ou $\varphi = I_X$.

./.

Définition 4.

Si X est un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé E, une correspondance $\varphi : X \to E$, à valeurs non vides, est dite *inward* si, pour toute forme linéaire continue p sur E et pour tout x de $A(X, p) = \{x \in X \ / \ p(x) = \max_{y \in X} p(y)\}$, il existe $y \in \varphi(x)$ tel que $p(y) \leq p(x)$.

En particulier, si φ est à valeurs dans X, φ est inward.

Définition 5.

Si X est un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique séparé E, une correspondance $\varphi : X \to E$ à valeurs non vides est dite *outward* si pour toute forme linéaire continue p sur E et pour tout x de $A(X, p) = \{x \in X \ / \ p(x) = \max_{y \in X} p(y)\}$, il existe $y \in \varphi(x)$ tel que $p(y) \geq p(x)$.

D'où le corollaire :

Corollaire 1.

Soit X un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace localement convexe séparé E. Toute correspondance $\varphi : X \to E$ à valeurs non vides, convexes et fermées, h.c.s. et inward ou outward, admet un point fixe, c'est-à-dire un point $\bar{x} \in X$ tel que $\bar{x} \in \varphi(\bar{x})$.

Le corollaire 1 contient le théorème de Kakutani-Fan puisque une correspondance $\varphi : X \to X$ s.c.s. et à valeurs non vides convexes fermées est h.c.s. et inward. Il serait sans objet de chercher à remplacer dans l'énoncé du théorème de Kakutani-Fan la semi-continuité supérieure de φ par l'hémi-continuité supérieure de φ puisque φ h.c.s. et à valeurs fermées dans le compact X serait alors s.c.s.

Si on identifie Ψ à la correspondance constante qui a tout x de X fait correspondre $\{0\}$ ou à la correspondance constante qui à tout x de X fait correspondre le cône polaire P^0 dans E d'un cône convexe P contenu dans le dual topologique E' de E (E' est l'ensemble des formes linéaires continues sur E), on obtient les deux corollaires suivants :

./.

Corollaire 2. (Cornet)

Soit X un sous-ensemble non vide convexe compact d'un espace E localement convexe séparé. Si une correspondance $\varphi : X \to E$ h.c.s., à valeurs non vides, convexes fermées, vérifie la condition suivante :

pour toute forme linéaire continue p sur E et pour tout x de $A(X, p) = \{x \in X \mid p(x) = \max_{y \in X} p(y)\}$ il existe $u \in \varphi(x)$ tel que $p(u) \leq 0$,

alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $0 \in \varphi(\bar{x})$.

Corollaire 3.

Soient X un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace E localement convexe séparé, E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$ (1), P un cône convexe fermé de sommet 0 dans E' et $P^o = \{y \in E \mid p(y) \leq 0, \ \forall p \in P\}$ le cône polaire dans E de P. Si une correspondance $\varphi : X \to E$, h.c.s. à valeurs non vides, convexes et *compactes* vérifie la condition :

Pour tout p de P et pour tout x de
$A(X, p) = \{x \in X \mid p(x) = \max_{y \in X} p(y)\}$

il existe $u \in \varphi(x)$ tel que $p(u) \leq 0$,

alors il existe $x \in X$ tel que $\varphi(\bar{x}) \cap P^o \neq \phi$.

Démonstration.

P^o est fermé dans E pour $\sigma(E, E')$ et donc fermé dans E et la correspondance $\psi : X \to E$ définie sur X par $\psi(x) = P^o$ est h.c.s. à valeurs non vides, convexes, fermées. Soit d'autre part $p \in E'$. Si $p \in P$, si $x \in A(X, p)$ et si $u \in \varphi(x)$ vérifie $p(u) \leq 0$, on a : $p(u) \leq p(0)$

---

(1) $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires sur $E' = p \to p(x)$ lorsque x parcourt E. C'est une topologie localement convexe, séparée (cf Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre II, paragraphe 6).

./.

et $0 \in \Psi(x) = P^o$. Si $p \notin P$, puisque $P^{oo} = P$, on a $p \notin P^{oo}$ et il existe $v' \in P^o$ tel que $p(v') > 0$. Soient alors $x \in A(X, p)$ et $u \in \varphi(x)$. Il suffit de prendre $\lambda \geq \max\left(0, \frac{p(u)}{p(v')}\right)$ et $v = \lambda v'$ pour obtenir $p(u) \leq p(v)$, $u \in \varphi(x)$ et $v \in \Psi(x) = P^o$.

La conclusion du corollaire se déduit alors de la conclusion de la proposition 7.

C.Q.F.D.

On remarquera que le corollaire 2 renforce l'énoncé que l'on obtiendrait en posant $P = E'$ dans le corollaire 3 et que le corollaire 3 pourrait se déduire du corollaire 2 en appliquant le corollaire 2 à la correspondance φ' définie sur X par : $\varphi'(x) = \varphi(x) - P^o$.

Si $E = R^\ell$, E' s'identifie avec E. Si d'autre part X est la boule-unité $B = \{x \in R^\ell \ / \ \|x\| \leq 1\}$ et si $p \in E'$, $A(X, p) = \{\frac{p}{\|p\|}\}$ et la condition de chacun des deux lemmes s'interprète comme un affaiblissement de la loi de Walras pour une correspondance définie sur B et interprétée comme une correspondance d'excès de demande. On obtient ainsi les deux résultats suivants dans lesquels B désigne la boule-unité de R^ℓ et S la sphère de centre 0 et de rayon 1 : $S = \{x \in R^\ell \ / \ \|x\| = 1\}$.

Corollaire 4.

Si ζ est une correspondance définie et hémi-continue supérieurement sur B et à valeurs non vides, convexes, fermées dans R^ℓ, vérifiant la condition :

$$\forall p \in S, \ \exists z \in \zeta(p), \ p.z \leq 0$$

alors il existe $\bar{p} \in B$ tel que $0 \in \zeta(\bar{p})$.

Corollaire 5.

Si P est un cône convexe fermé de sommet 0 de R^ℓ et si ζ est une correspondance définie et hémi-continue supérieurement sur $B \cap P$ et à valeurs non vides, convexes, *compactes* dans R^ℓ, vérifiant la condition :

./.

$$\begin{cases} \forall\ p \in S \cap P, \quad \exists\ z \in \zeta\ (p), \quad p.z \leq 0 \\ \text{alors il existe } \bar{p} \in B \text{ tel que } \zeta\ (\bar{p}) \cap P^{o} \neq \phi. \end{cases}$$

Lorsque P est égal à l'orthant positif R^{ℓ}_{+} de R^{ℓ} le corollaire 5 n'est autre qu'une variante h.c.s. d'un énoncé généralement appelé lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu. Lorsque P est quelconque, le corollaire 5 est une variante h.c.s. d'un résultat de Debreu (1956); comme C. Bidard (1975), et bien que cette forme généralisée soit peu citée dans la littérature, nous pensons qu'il s'agit là du véritable énoncé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu. On verra dans le chapitre II que le corollaire 4 peut être utilisé pour démontrer l'existence d'un équilibre transitif pour une économie d'échange sans hypothèse de libre disposition, de la même façon que le lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu est utilisé pour démontrer l'existence d'un équilibre transitif avec libre disposition.

Enfin si on identifie l'une des deux correspondances φ ou Ψ de la proposition 7 à la correspondance constante $x \to \{y\}$ où y est un point de X, on obtient le corollaire 6 dont le corollaire 7 est un cas particulier.

Corollaire 6.

Soient X un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace localement convexe séparé E et φ une correspondance définie h.c.s. sur X à valeurs non vides, convexes fermées dans E. Si φ est *outward* ou si φ vérifie la condition :

$$\forall\ p \in E' \text{ et } \forall\ x \in A(X,\ p),\ \exists\ u \in \varphi(x) \text{ tel que } p(u) \leq \min_{z \in X} p(z)$$

(on dit alors que φ est *fortement inward* [1])

alors pour tout y de X il existe $\bar{x} \in X$ tel que $y \in \varphi(\bar{x})$.

Corollaire 7.

Soit X un sous-ensemble non vide convexe compact d'un espace localement convexe séparé E. Si φ est une correspondance de

----

(1) La définition est due à Cornet (1975).

./.

X dans X, s.c.s. et à valeurs non vides convexes fermées vérifiant l'une des deux conditions :

$\forall\, p \in E'$ et $\forall\, x \in A(X, p)$, $\varphi(x) \cap A(X, p) \neq \phi$ (1)

$\forall\, p \in E'$ et $\forall\, x \in A(X, p)$, $\varphi(x) \cap A(X, -p) \neq \phi$ (2)

alors $X = \varphi(X) = \bigcup_{x \in X} \varphi(x)$ (on dit alors que φ est surjective).

La première partie du corollaire 7 généralise un résultat de Rogalski (1972) auquel elle est équivalente si E est de dimension finie :

Corollaire 8. (Rogalski)

Si X est un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace localement convexe séparé E et si φ est une correspondance de X dans X semi-continue supérieurement, à valeurs non vides convexes fermées et vérifiant la condition :

Pour toute facette (2) fermée F de X et tout x de F, $\varphi(x) \cap F \neq \phi$, alors φ est surjective.

On remarquera pour terminer avec Lasry-Robert (1974) que le corollaire 8 implique le lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz à partir duquel ont été démontrés tous les résultats de ce chapitre :

Soient, en effet, $\{a^o, a^1, \ldots, a^p\}$, $(p + 1)$ points affinement indépendants de R^ℓ, et $F^o, F^1, \ldots, F^p$, $(p + 1)$ sous-ensembles fermés de R^ℓ vérifiant la condition :

$$\forall\, J \subset \{0, 1, \ldots, p\},\ \mathrm{conv}\,(\{a^i\}_{i \in J}) \subset \bigcup_{i \in J} F^i$$

Si $\bigcap_{i=0}^{p} F^i = \phi$, faisons correspondre à tout x du simplexe P de sommets $a^o, a^1, \ldots, a^p$ le sous-ensemble de $I = \{0, \ldots, p\}$: $I(x) = \{i / x \notin F^i\}$.

---

(2) Pour la définition des facettes d'un ensemble convexe, voir Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre II, paragraphe 7, prop. 1. En dimension finie, voir Rockafellar (1972), partie IV, section 18.

./.

$I \neq \phi$ et puisque, par hypothèse, $P \subset \bigcup_{i=0}^{p} F^i$, $I(x) \neq \{0, 1, \ldots, p\}$.

Définissons la correspondance $\varphi : P \to P$ par :

$$\varphi(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \text{conv}(\{a^j\}_{j \neq i}) .$$

φ est à valeurs non vides (si $j \notin I(x)$, $a^j \in \varphi(x)$), convexes, fermées. Par ailleurs si $x' \in P \setminus (\bigcup_{i \in I(x)} F^i)$, $I(x) \subset I(x')$ et $\varphi(x') \subset \varphi(x)$.

Comme $P \setminus (\bigcup_{i \in I(x)} F^i)$ est un voisinage ouvert de x, ceci montre que φ est s.c.s. Enfin si F est une facette de P, si $x \in F$ et si F_x est la facette de P dont l'intérieur relatif contient x, il existe J tel que $F_x = \text{conv}(\{a^i\}_{i \in J})$. De la condition du lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, on déduit successivement :

$x \in \bigcup_{i \in J} F^i$; $\exists\, i \in J$, $i \notin I_{(x)}$, $a^i \in (\varphi(x) \cap F_x) \subset (\varphi(x) \cap F)$.

Il résulte alors du corollaire 8 que φ est surjective, ce qui est absurde puisque les points de l'intérieur relatif de P n'appartiennent à aucun $\varphi(x)$.

V. <u>THEOREMES OBTENUS PAR SELECTION</u>.

Soit φ une correspondance : $X \to Y$. Par *sélection* de φ, on désigne une fonction f telle que pour tout x de X, $f(x)$ appartienne à $\varphi(x)$.

L'idée générale qui préside à la construction de ce paragraphe est d'obtenir des théorèmes de point fixe, d'élément maximal ou de surjectivité pour φ en appliquant les théorèmes des paragraphes précédents, non plus directement à la correspondance φ , mais à une sélection continue de φ ou à une correspondance construite à partir d'une sélection continue de φ .

Pour préciser les conditions dans lesquelles une telle construction est possible, nous utiliserons trois théorèmes de sélection, dûs à Michael, de difficulté de démonstration croissante. L'idée du premier quasi-évidente, se trouve dans Michael (1957). Le deuxième est démontré dans Michael (1956). Le troisième théorème est enfin un cas particulier du théorème 3.1."' de cet article. ./.

Rappelons auparavant qu'un espace topologique X est dit *paracompact* s'il est séparé et si pour tout recouvrement ouvert $(U^i)_{i\in I}$ de X il existe un recouvrement ouvert $(V^j)_{j\in J}$ de X, *plus fin* $(\forall\, j \in J,\ \exists\, i \in I,\ V^j \subset U^i)$ et *localement fini* (tout point de X admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des ouverts V^j).

Un espace paracompact possède la propriété suivante [(1)] (cf. Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre IX, paragraphe 4) qui généralise la propriété que nous avons énoncée dans le paragraphe II pour un espace compact :

Pour tout recouvrement ouvert (U^i) d'un espace paracompact, il existe une *partition continue de l'unité* $(\alpha^i)_{i\in I}$ *sur* X, *localement finie* et *faiblement subordonnée au recouvrement* (U^i), c'est-à-dire une famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ de fonctions numériques ≥ 0, définies et continues dans X, vérifiant :

- $\forall\, i \in I,\ \alpha^i(x) = 0$ pour $x \notin U^i$

- $\forall\, x \in X$, il existe un voisinage V_x de x et une partie *finie* H_x de I telle que pour tout y de V_x $\alpha^i(y) = 0$ si $i \notin H_x$ et $\sum\limits_{i\in I} \alpha^i(y) = \sum\limits_{i\in H_x} \alpha^i(y) = 1.$

Un espace métrisable est paracompact.

Proposition 8.

Si X est paracompact, si Y est un espace vectoriel topologique et si $\varphi : X \to Y$ est une correspondance à valeurs non vides et convexes vérifiant :

$\forall\, y \in Y,\ \varphi^{-1}(y) = \{x \in X \,/\, y \in \varphi(x)\}$ est un sous-ensemble ouvert de X

./.

---

(1) Dans la démonstration de cette propriété, on commence par démontrer l'existence d'une partition continue de l'unité $(\beta_j)_{j\in J}$ faiblement subordonnée à un recouvrement ouvert $(V^j)_{j\in J}$ de X plus fin que $(U^i)_{i\in I}$ et localement fini; puis on définit à partir de $(\beta_j)_{j\in J}$ la partition $(\alpha^i)_{i\in I}$, de façon que pour tout x de X, il existe un voisinage V_x de x et une *partie finie* H_x de I telle que : $\sum\limits_{i\in I} \alpha^i(y) = \sum\limits_{i\in H_x} \alpha^i(y),\ \forall\, y \in V_x$.

Alors il existe une fonction f *continue* : $X \to Y$ telle que $\forall\, x \in X,\ f(x) \in \varphi(x)$ (on dit qu'une telle fonction est une *sélection continue* de X).

Démonstration.

Les $\varphi^{-1}(y)$ constituent, en effet, par hypothèse, un recouvrement ouvert de X. Si $(\alpha^y)_{y \in Y}$ est une partition continue de l'unité sur X, localement finie et faiblement subordonnée au recouvrement $(\varphi^{-1}(y))_{y \in Y}$, la fonction $f : X \to Y$ définie par $f(x) = \sum_{y \in Y} \alpha^y(x)\, y$ est, du fait de la convexité de chacun des $\varphi(x)$, une sélection continue de φ.

C.Q.F.D.

Lemme 1.

Si X est paracompact, si Y est un espace vectoriel topologique et si $\varphi : X \to Y$ est une correspondance semi-continue inférieurement sur X à valeurs non vides et convexes, alors pour tout voisinage convexe V de l'origine dans Y il existe une fonction *continue* $f : X \to Y$ telle que :

$$\forall\, x \in X,\quad f(x) \in \varphi(x) + V.$$

Démonstration.

A tout y de Y, associons en effet :

$$V^y = \{x \in X \ /\ y \in \varphi(x) + V\} = \{x \in X \ /\ \varphi(x) \cap (\{y\} - V) \neq \phi\}.$$

De la semi-continuité inférieure de φ, on déduit que les V^y sont ouverts dans X; puisque tout $\varphi(x)$ est non vide, les V^y constituent un recouvrement ouvert de X. Si (α^y) est une partition continue de l'unité sur X, localement finie et faiblement subordonnée au recouvrement $(V^y)_{y \in Y}$, la fonction $f : X \to Y$ définie par $f(x) = \sum_{y \in Y} \alpha^y(x)\, y$ est continue et vérifie, du fait de la convexité de chacun des ensembles $\varphi(x) + V$: $\forall\, x \in X,\ f(x) \in \varphi(x) + V$

C.Q.F.D.

./.

Le lemme 1 permet de démontrer le théorème de sélection suivant :

Proposition 9.

Si X est paracompact, si Y est un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet et si $\varphi : X \to Y$ est une correspondance *semi-continue inférieurement* sur X, à valeurs non vides, convexes et *fermées*, alors il existe une fonction *continue* $f : X \to Y$ telle que $\forall x \in X$, $f(x) \in \varphi(x)$.

Démonstration.

Puisque Y est localement convexe et métrisable, il existe un système fondamental dénombrable $(V^i)_{i=1}^{\infty}$ de voisinages convexes et symétriques de 0 dans Y, tels que : $V^{i+1} \subset \frac{1}{2} V^i$, quel que soit i entier. On va d'abord montrer, par récurrence sur n, qu'il est possible de construire une suite de fonctions continues $f^n : X \to Y$ vérifiant les relations :

$$\forall x \in X \quad f^n(x) \in \{f^{n-1}(x)\} + 2\, V^{n-1} \qquad \forall n \geq 2 \qquad (1)$$

$$\forall x \in X \quad f^n(x) \in \varphi(x) + V^n \qquad \forall n \geq 1 \qquad (2)$$

L'existence de f^1 résulte du lemme 1 précédent. Supposons $f^1, f^2, \ldots, f^n$ déjà construites et soit φ^{n+1} la correspondance de X dans Y définie par : $\varphi^{n+1}(x) = \varphi(x) \cap (\{f^n(x)\} + V^n)$.

Puisque f^n est une fonction continue, on peut montrer que φ^{n+1} est une correspondance s.c.i. Il résulte d'autre part de la construction de φ^{n+1} et de l'hypothèse de récurrence que φ^{n+1} est à valeurs convexes, non vides. Du lemme 1, on déduit l'existence de f^{n+1} vérifiant :

$$\forall x \in X, \quad f^{n+1}(x) \in \varphi^{n+1}(x) + V^{n+1} \text{ , ce qui implique}$$

$$\forall x \in X, \quad f^{n+1}(x) \in \varphi(x) + V^{n+1}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in X, \quad f^{n+1}(x) \in \{f^n(x)\} + 2\, V^n$$

La suite (f^n) étant construite, on déduit de la relation 1 et du fait que Y est complet que la suite (f^n) converge uniformément vers une fonction $f : X \to Y$ continue. Puisque φ est à valeurs fermées et par séparation d'un fermé et d'un compact dans un espace localement convexe, on déduit des relations (2) que : $\forall x \in X$, $f(x) \in \varphi(x)$.

C.Q.F.D.

./.

Lemme 2.

Si X est un sous-ensemble de R^ℓ et $\varphi : X \to R^\ell$ une correspondance semi-continue inférieurement et à valeurs non vides, convexes fermées, il existe une collection dénombrable F de sélections continues de φ telles que, pour tout x de X, l'ensemble $\{f(x)\}_{f\in F}$ soit dense dans $\varphi(x)$.

Démonstration.

On remarquera pour commencer que R^ℓ est localement convexe, métrisable et complet et que X, que l'on peut munir de la distance induite par la distance euclidienne sur R^ℓ, est un espace topologique métrisable, et donc paracompact.

Soient $\{y^j\}_{j=1}^{\infty}$ est un sous-ensemble dénombrable dense de R^ℓ et $(V^k)_{k=1}^{\infty}$ la suite des boules ouvertes de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2^k}$.
Pour chaque couple (j, k), l'ensemble $U^{j,k} = \{x \in X \ / \ y^j \in \varphi(x) + V^k\}$ est ouvert par semi-continuité inférieure de φ et, comme tout ouvert de l'espace métrisable X, réunion d'une famille dénombrable d'ensembles fermés dans X, ce que l'on peut écrire :

$$U^{j,k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F^{i,j,k} .$$

Définissons les correspondances $X \to R^\ell$:

$$\varphi^{i,j,k}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \notin F^{i,j,k} \\ \overline{\varphi(x) \cap (\{y^i\} - V^k)} & \text{si } x \in F^{i,j,k} \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que chacune des correspondances $\varphi^{i,j,k}$ est semi-continue inférieurement à valeurs non vides, convexes, fermées. Soit, d'après la proposition 9, $f^{i,j,k}$ une sélection continue de $\varphi^{i,j,k}$.

D'une part, chacune des fonctions $f^{i,j,k}$ est une sélection continue de φ et la famille $(f^{i,j,k})$ est évidemment dénombrable. D'autre part, si $x \in X$, si $y \in \varphi(x)$ et si V^k est la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2^k}$, il existe j tel que $y^j \in y + V^{k+2}$ et il existe i tel que $x \in F^{i,j,k+2}$.

./.

On en déduit :

$$f^{i,j,k+2}(x) \in \{y^j\} + \overline{V^{k+2}} \subset \{y^j\} + V^{k+1} \subset \{y\} + V^{k+1} + V^{k+2}$$
$$\subset \{y\} + V^k$$

ce qui montre que l'ensemble $\{f^{i,j,k}(x)\}$ est dense dans $\Psi(x)$.

C.Q.F.D.

Proposition 10.

Si X est un sous-ensemble de R^ℓ et si $\varphi : X \to R^\ell$ est une correspondance semi-continue inférieurement à valeurs non vides et convexes, il existe une fonction $f : X \to R^\ell$, continue, telle que $\forall\, x \in X$, $f(x) \in \varphi(x)$.

Démonstration.

A partir de φ, on définit la correspondance $\psi : X \to R^\ell$ semi-continue inférieurement, à valeurs non vides, convexes et fermées : $\psi(x) = \overline{\varphi(x)}$.

D'après le lemme 2, il existe une famille $(g^i)_{i=1}^\infty$ de sélections de ψ telle que tout x de X, l'ensemble $\{g^i(x)\}_{i=1}^\infty$ soit dense dans $\psi(x)$.

On définit successivement :

$$f^i(x) = g^1(x) + \frac{g^i(x) - g^1(x)}{\max\,(1, \|g^i(x) - g^1(x)\|)}$$

et $$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f^i(x)$$

On commencera par remarquer que la somme écrite a un sens et que la fonction f est continue. Il reste à démontrer que : $\forall\, x \in X$, $f(x) \in \varphi(x)$.

On sait déjà, par convexité de $\overline{\varphi(x)}$, que $f^i(x) \in \overline{\varphi(x)}$, $\forall\, i$ entier et que la distance à $\overline{\varphi(x)}$ des sommes partielles $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} f^i(x)$ tend vers 0. Puisque $\overline{\varphi(x)}$ est fermé, il en résulte que $f(x) \in \overline{\varphi(x)}$.

./.

Si $f(x)$ appartient à l'intérieur relatif de $\overline{\varphi(x)}$, on en déduira : $f(x) \in \varphi(x)$. Supposons donc que ce ne soit pas le cas. Il existe une facette F de $\overline{\varphi(x)}$, distincte de $\overline{\varphi(x)}$, dont l'intérieur relatif contient $f(x)$.

Pour les mêmes raisons que plus haut, quel que soit i entier, $\frac{1}{1-\frac{1}{2^i}} \sum_{j \neq i} \frac{1}{2^j} f^j(x) \in \overline{\varphi(x)}$, de sorte que le point $f(x) = \frac{1}{2^i} f^i(x) + \sum_{j \neq i} \frac{1}{2^j} f^j(x)$, s'il est distinct de $f^i(x)$, est un point interne du segment fermé de $\overline{\varphi(x)}$ dont $f^i(x)$ est l'une des extrémités. Dans les deux cas, on en déduit : $f^i(x) \in F$, $\forall$ i entier. Enfin, puisque par construction le point $f^i(x)$, s'il est distinct de $g^1(x)$, est un point interne d'un segment fermé de $\overline{\varphi(x)}$ dont $g^i(x)$ est une des extrémités, on en déduit : $g^i(x) \in F$, $\forall$ i entier. Comme F est contenu dans la frontière relative de $\overline{\varphi(x)}$, ceci contredit l'hypothèse selon laquelle l'ensemble $\{g^i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ est dense dans $\overline{\varphi(x)}$.

C.Q.F.D.

On peut naturellement, comme le suggèrent Hildenbrand et Kirman (1976) dans leur annexe mathématique[1], démontrer par sélection le théorème de Kakutani à partir du théorème de Brouwer. C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans la démonstration de la proposition 2 qui pour tout $\varepsilon > 0$ associe implicitement à une correspondance φ définie sur un sous-ensemble X convexe et compact de R^ℓ et à valeurs non vides et convexes dans X, la correspondance $\Psi_\varepsilon : X \to X$ définie par : $\Psi_\varepsilon(x) = \mathrm{Conv}\left(\bigcup_{z \in B_0(x,\varepsilon) \cap X} \varphi(z)\right)$. Chacune des correspondances Ψ_ε est à valeurs non vides et convexes et vérifie, par construction, la condition de continuité : $\forall\, y \in X, \Psi_\varepsilon^{-1}(y)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

D'après la proposition 8, chacune des correspondances Ψ_ε admet une sélection continue et les fonctions f_ε construites dans la démonstration de la proposition 2 sont précisément des sélections continues des correspondances Ψ_ε. La suite de la démonstration a consisté à utiliser la fermeture de la correspondance φ et la convexité de ses ensembles images pour montrer l'existence d'une suite de points fixes de ces sélections convergeant vers un point fixe de φ.

./.

(1) selon une idée empruntée à Cellina (1969)

Nous utiliserons ici les propositions 8, 9 et 10 pour obtenir de nouveaux résultats, à partir des corollaires 1, 3 et 7 de la proposition 7.

Comme dans le paragraphe précédent, si X est sous-ensemble convexe compact d'un espace localement convexe séparé E, E' désignera dans tout ce qui suit l'ensemble des formes linéaires continues sur E et pour tout p de E', on notera $A(X, p)$ l'ensemble :

$$A(X, p) = \{x \in X \;/\; p(y) \leq p(x), \;\; \forall\, y \in X\}$$

Le premier résultat est un théorème de point fixe.

Proposition 11.

Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace localement convexe séparé E. Si φ est une correspondance $X \to E$ à valeurs non vides convexes, vérifiant l'une des deux conditions :

$$\forall\, p \in E' \;,\; \forall\, x \in A(X, p) \;,\; \forall\, y \in \varphi(x) \;,\; p(y) \leq p(x) \qquad (1)$$

$$\forall\, p \in E' \;,\; \forall\, x \in A(X, p) \;,\; \forall\, y \in \varphi(x) \;,\; p(y) \geq p(x) \qquad (2)$$

et dans chacun des trois cas suivants :

a) $\forall\, y \in E$, $\varphi^{-1}(y)$ est un sous-ensemble ouvert de X

b) E est métrisable et complet et φ est s.c.i. à valeurs fermées

c) $E = R^{\ell}$ et φ est s.c.i.

φ admet un point fixe, c'est-à-dire un point $\bar{x} \in X$, tel que $\bar{x} \in \varphi(\bar{x})$.

Démonstration.

La démonstration de la proposition 11 est immédiate. Dans chacun des trois cas a), b) ou c), la correspondance φ admet une sélection continue f. Selon que φ vérifie la condition (1) ou la condition (2), f est inward ou outward; dans les deux cas, en vertu du corollaire 1 de la proposition 7, f admet un point fixe x qui est point fixe de φ .

C.Q.F.D.

./.

Lorsque φ est une correspondance $X \to X$ (et donc vérifie la condition (1)), le résultat obtenu dans le cas a) est plus faible que celui de la proposition 5 dans l'énoncé de laquelle l'espace E n'était pas nécessairement localement convexe. En revanche, dans le cas c), le résultat obtenu, dû à Bergstrom (1975), précise dans R^{ℓ} l'énoncé du corollaire 1 de la proposition 5, et comme lui peut être utilisé aussi bien comme un théorème d'existence d'élément maximal pour une correspondance de préférence (stricte) sur un ensemble X, s.c.i. et vérifiant une hypothèse de convexité et d'irréflexité, que comme un théorème de point fixe.

Corollaire 1. (Bergstrom)

Soit X un sous-ensemble non vide, convexe, compact de R^{ℓ} et φ une correspondance $X \to X$ semi-continue inférieurement.

Alors ou il existe $\bar{x}$ conv $(\varphi(\bar{x}))$, ou il existe $\bar{\bar{x}}$ tel que $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \phi$.

Démonstration.

Si φ est à valeurs non vides, la correspondance $\Psi : X \to X$ définie par $\Psi(x) = \text{conv}(\varphi(x))$ est à valeurs convexes, non vides et on peut vérifier facilement qu'elle est s.c.i. Elle vérifie d'autre part la condition (1) de la proposition 11 et admet donc un point fixe $\bar{x} \in \Psi(\bar{x}) = \text{conv}(\varphi(\bar{x}))$.

C.Q.F.D.

Le corollaire 1 est lui-même contenu dans le corollaire du résultat suivant obtenu par sélection à partir du théorème de Kakutani-Fan, selon une idée de Gale et Mas-Colell (1975) qui, comme Berstrom (1975), n'énoncent que la partie c) de la proposition suivante :

Proposition 12.

Si (E^i) $i = 1,\dots, m$ est une famille finie d'espaces localement convexes séparés et si, pour tout $i = 1,\dots, m$, X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de E^i et φ^i une correspondance à valeurs convexes de $X = \prod_{i=1}^{m} X^i$, dans X^i, dans chacun des trois cas suivants :

./.

a) $\forall\, i = 1,\dots, m$, E^i est métrisable et $\forall\, y^i \in X^i$, $(\varphi^i)^{-1}(y^i)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

b) $\forall\, i = 1,\dots, m$, E^i est métrisable et complet et φ^i est s.c.i. à valeurs *fermées*.

c) $\forall\, i = 1,\dots, m$, $E^i = R^\ell$ et φ^i est s.c.i.

alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $i = 1,\dots, m$ on ait :

$$\varphi^i(\bar{x}) = \phi \quad \text{ou} \quad \bar{x}^i \in \varphi^i(\bar{x})$$

Démonstration:

Soit, pour tout $i = 1,\dots, m$, $U^i = \{x \in X \,/\, \varphi^i(x) \neq \phi\}$.

si φ^i/U^i désigne la restriction de la correspondance φ^i au sous-ensemble U^i, dans chacun des trois cas a), b), c) la correspondance φ^i/U^i admet une sélection continue $f^i : U^i \to X^i$. Par semi-continuité inférieure de φ^i, les ensembles $U^i = (\varphi^i)^-\,(E^i) = \{x \in X \,/\, \varphi^i(x) \cap E^i \neq \phi\}$ sont ouverts dans X, de sorte que les correspondances $\Psi^i : X \to E^i$ définies par :

$$\Psi^i(x) = \begin{cases} \{f^i(x)\} & \text{si } x \in U^i \\ X^i & \text{si } x \notin U^i \end{cases}$$

sont semi-continues supérieurement. Par construction, elles sont à valeurs non vides, convexes et compactes.

Comme produit fini de correspondances semi-continues supérieurement à valeurs convexes et compactes, la correspondance $\Psi : X \to X$ définie par :

$$\Psi(x) = \prod_{i=1}^{m} \Psi^i(x)$$

est semi-continue supérieurement [(1)], à valeurs non vides convexes et compactes.

----

(1) La semi-continuité supérieure d'un produit fini de correspondances s.c.s. à valeurs compactes est démontrée dans Berge (1959), Chapitre VI, Paragraphe 2, Théorème 4'.

./.

D'après le théorème de Kakutani-Fan, φ admet un point fixe $\overline{x}$ vérifiant la conclusion de la proposition.

C.Q.F.D.

Corollaire 1.

Si (E^i) $i = 1,\dots, m$ est une famille finie d'espaces localement convexes métrisables et si pour tout $i = 1,\dots, m$, X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de E^i et φ^i une correspondance de $X = \prod_{j=1}^{m} X^j$ dans X^i, dans chacun des deux cas suivants :

a) $\forall\, i = 1,\dots, m$, $\forall\, y^i \in X^i$, $(\varphi^i)^{-1}(y^i)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

b) $\forall\, i = 1,\dots, m$, $E^i = R^\ell$ et φ^i est s.c.i.

alors il existe $\overline{x} \in X$ tel que pour tout $i = 1,\dots, m$, on ait :

$$\varphi^i(\overline{x}) = \phi \quad \text{ou} \quad \overline{x}^i \in \operatorname{conv}(\varphi^i(\overline{x}))$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la proposition 12 aux correspondances Ψ^i, définies pour tout $i = 1,\dots, m$ par $\Psi^i(x) = \operatorname{conv}(\varphi^i(x))$ et qui vérifient les conditions a) ou c) de la proposition 12 selon que les correspondances φ^i vérifient les conditions a) ou b) du corollaire.

C.Q.F.D.

Corollaire 2. (Shafer-Sonnenschein)

Si pour tout $i = 1,\dots, m$, X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de R^ℓ et φ^i une correspondance définie sur $X = \prod_{j=1}^{m} X^j$ à valeurs dans X^i, dont le graphe est ouvert dans $X \times X^i$, alors il existe $\overline{x} \in X$ tel que pour tout $i = 1,\dots, m$ on ait :

$$\varphi^i(\overline{x}) = \phi \quad \text{ou} \quad \overline{x}^i \in \operatorname{conv}(\varphi^i(\overline{x}))$$

Ce corollaire est un cas particulier d'un théorème que Shafer et Sonnenschein obtiennent à partir du théorème de Kakutani, sans aucun appel au théorème de sélection de Michaël. Il est intéressant d'en indiquer la démonstration directe :

./.

Démonstration.

Soient, en effet, pour tout $i = 1,\ldots, m$, $G_{\varphi_i} = \{(y, x^i) \in X \times X^i \,/\, x^i \in \varphi^i(y)\}$ le graphe, ouvert, de la correspondance φ^i et $F^i : X \to X^i$ la correspondance définie par :

$$F^i(y) = \{x^i \in X^i \,/\, d((y, x^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i}) \geq d((y, z^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i}),\ \forall z^i \in X^i\}$$

où $d((y, x^i), A)$ désigne la distance du point (y, x^i) à l'ensemble A dans l'espace métrique $X \times X^i$.

La fonction : $z^i \to d((y, z^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i})$ est une fonction continue de X^i dans R_+ vérifiant :

$$d((y, z^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i}) > 0 \iff (y, z^i) \in G_{\varphi_i} \iff z^i \in \varphi^i(y).$$

Les correspondances $G^i : X \to X^i$ définies par $G^i(y) = \text{conv}\, F^i(y)$, $\forall y \in X$, sont fermées, à valeurs non vides, convexes. Il en est de même de la correspondance $G = \prod_{i=1}^{m} G^i$ de X dans X.

Soit alors, en application du théorème de Kakutani, $\bar{x}$ un point de G. On a pour tout $i = 1,\ldots, m$, $\bar{x}^i \in \text{conv}\, F^i(\bar{x})$.

Si, alors, $\varphi^i(\bar{x}) \neq \phi$, soit $z^i \in \varphi^i(\bar{x})$.

$d((\bar{x}, z^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i}) > 0$ de sorte que $d((\bar{x}, x^i), \complement_{X \times X^i} G_{\varphi_i}) > 0, \forall x^i \in F^i(\bar{x})$.

On en déduit : $x^i \in \varphi^i(\bar{x})$, $\forall x^i \in F^i(\bar{x})$ et donc $\bar{x}^i \in \text{conv}\, \varphi^i(\bar{x})$.

C.Q.F.D.

La même démonstration directe pourrait évidemment être donnée pour le corollaire suivant :

Corollaire 3.

Si pour tout $i = 1,\ldots, m$, E^i est un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable, X^i un sous-ensemble non vide, convexe, compact de E^i et φ^i une correspondance de $X = \prod_{j=1}^{m} X^j$ dans X^i dont le graphe est ouvert dans $X \times X^i$,

./.

alors il existe $\bar{x}$ tel que, pour tout $i = 1,\dots, m$, on ait :

$$\varphi^i(\bar{x}) = \phi \text{ ou } \bar{x}^i \in \text{conv}\, \varphi^i(\bar{x}).$$

Pour $m = 1$, le corollaire 3 est plus faible que le corollaire 1 de la proposition 5 qui impliquait, on l'a vu, le théorème de Kakutani-Fan. On peut également déduire du corollaire 2 (pour $m = 1$) le théorème de Kakutani :

Corollaire 4. (Kakutani)

Si X est un sous-ensemble convexe compact de R^ℓ et si φ est une correspondance de X, dans X s.c.s. à valeurs convexes, fermées, alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $x \in \varphi(\bar{x})$.

Démonstration.

Supposons, en effet, que φ n'admette pas de point fixe. Pour tout x de X, il existe U_x, voisinage ouvert de x, et V_x ouvert convexe contenant $\varphi(x)$ tel que :

$$U_x \cap V_x \neq \phi \quad \text{et} \quad x' \in U_x \Rightarrow \varphi(x') \subset V_x$$

Les (U_x) forment un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire, puisque X est compact un recouvrement fini $(U_{x_i})_{i=1,\dots, m}$. Si $(\alpha^i)_{i=1,\dots, m}$ est une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_{x_i})_{i=1,\dots, m}$ de X, les supports $F_i = \text{supp}(\alpha^i) = \{x \in X \,/\, \alpha^i(x) > 0\}$ de chacune des fonctions α^i forment un recouvrement fermé de X ($\bigcup_{i=1}^{m} F^i = X$), vérifiant : $\forall\, i = 1,\dots, m$, $F_i \subset U_{x_i}$.

Soit alors Ψ la correspondance définie par :

$$\Psi(x) = \bigcap_{x \in F_i} V_{x_i} .$$

La correspondance ψ vérifie les propriétés suivantes :

- ψ *a un graphe ouvert*. En effet, si $(x, y) \in G_\psi$ et si $U = \bigcap_{x \notin F_i} \complement_X F_i$

./.

$x' \in U \Rightarrow$ si $x \notin F_i$, $x' \notin F_i \Rightarrow \{i \,/\, x' \in F^i\} \subset \{i \,/\, x \in F^i\}$

$\Rightarrow \Psi(x) \subset \Psi(x')$

On a donc $x' \in U$ et $z' \in \Psi(x) \Rightarrow z' \in \Psi(x')$. Comme Ψ est,par construction,à valeurs ouvertes, ceci montre que Ψ a un graphe ouvert.

- Ψ *est à valeurs non vides,* car $\varphi(x) \subset \Psi(x)$, *et convexes.*
- Ψ *n'admet pas de point fixe* car pour tout x de X, $x \in F_i \Rightarrow x \notin V_{x_i} \Rightarrow x \notin \varphi(x)$

Elle contredit donc l'énoncé (pour m = 1) du corollaire 2

C.Q.F.D.

L'obtention par sélection de variantes du corollaire 3 de la proposition 7 est tout aussi immédiate.

<u>Proposition 13</u>.

Soient X un sous-ensemble non vide, convexe, compact d'un espace localement convexe séparé E, P un cône convexe de sommet 0 dans E', fermé pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, et P^o le cône polaire dans E de P. Si φ est une correspondance $X \to E$, à valeurs non vides et convexes, vérifiant :

$$\forall\, p \in P \;,\; \forall\, x \in A(X, p) \;,\; \forall\, u \in \varphi(x) \quad p(u) \leq 0$$

et dans chacun des trois cas suivants :

a) $\forall\, y \in E$, $\varphi^{-1}(y)$ est ouvert dans X.

b) E est métrisable et complet et φ s.c.i. à valeurs *fermées.*

c) $E = R^{\ell}$ et φ s.c.i.

il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\varphi(\overline{x}) \cap P^o \neq \phi$.

Dans le cas c) et si X est la boule-unité B de R^{ℓ}, on obtient une variante s.c.i. d'un énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu.

./.

Corollaire.

Si P est un cône convexe fermé de sommet 0 dans R^{ℓ} et si ζ est une correspondance définie et s.c.i. sur $B \cap P$ à valeurs non vides et convexes dans R^{ℓ}, vérifiant la condition :

$$\forall\, p \in S \cap P \;,\quad \forall\, z \in \zeta(p) \;,\; p.z \leq 0$$

alors il existe $\overline{p} \in B$ tel que $\zeta(\overline{p}) \cap P^{o} \neq \phi$.

Enfin l'application des théorèmes de sélection au corollaire 7 de la proposition 7 fournit la proposition suivante dont le cas b) est dû à Cornet (1975) et la partie (1) du cas c) à Rogalski (1972) :

Proposition 14.

Soit X un sous-ensemble non vide convexe compact d'un espace localement convexe séparé E. Si φ est une correspondance de X dans X, à valeurs non vides et convexes, vérifiant l'une des conditions :

$$\forall\, p \in E' \;,\; \forall\, x \in A(X,\, p) \;,\; \varphi(x) \subset A(X,\, p) \qquad (1)$$

$$\forall\, p \in E' \;,\; \forall\, x \in A(X,\, p) \;,\; \varphi(x) \subset A(X,\, -p) \qquad (2)$$

et dans chacun des trois cas suivants :

a) $\forall\, u \in E$, $\varphi^{-1}(y)$ est ouvert dans X.

b) E est métrisable et complet et φ s.c.i. à valeurs fermées.

c) $E = R^{\ell}$ et φ est s.c.i.

$$X = \varphi(X) = \bigcup_{x \in X} \varphi(x).$$

o

o o

DIAGRAMME DES PRINCIPALES IMPLICATIONS DEMONTREES DANS LE CHAPITRE

Lemme KKM

Lemme de Ky Fan

Théorème de Brouwer

Existence d'éléments maximaux pour une correspondance KF n'admettant pas de point fixe (Browder-Fan)

Théorème de non-séparation de Fan

Théorème de Kakutani

Existence d'éléments maximaux pour une correspondance localement KF majorée

Dans un EVT localement convexe, séparé E

Théorème de Kakutani-Fan

Pt fixe d'une correspondance inward ou outward, hcs, à valeurs non vides convexes, fermées

Théorème de Cornet et lemmes de Gale-Nikaido-Debreu pour une correspondance hcs, à valeurs non vides, convexes fermées

Surjectivité d'une correspondance outward ou fortement inward, hcs, à valeurs non vides, convexes, fermées

(par sélection)

(par sélection)

(par sélection)

(par sélection)

Dans un EVT, localement convexe, séparé, métrisable et complet E

Théorème de Gale et Mas-Colell

Pt fixe d'une correspondance inward ou outward
- sci à valeurs non vides convexes, fermées
- sci à valeurs non vides et convexes si $E = R^{\ell}$

Lemmes de Gale-Nikaido Debreu pour une correspondance
- sci à valeurs non vides convexes, fermées
- sci à valeurs non vides et convexes si $E = R^{\ell}$

Surjectivité d'une correspondance
- sci à valeurs non vides, convexes, fermées
- sci à valeurs non vides et convexes si $E = R^{\ell}$

C H A P I T R E   I I

L'EQUILIBRE TRANSITIF

I. INTRODUCTION

Précisons tout d'abord le sens des mots qui forment le titre de ce chapitre.

Par équilibre, nous entendons l'équilibre d'une économie finie de propriété privée, telle que la définition en a été rappelée dans l'introduction générale. En fait, pour simplifier la présentation de théorèmes dont l'énoncé et la démonstration, au niveau que nous avons adopté de généralité dans les hypothèses, ont déjà une suffisante complexité, nous nous référerons à un cas particulier de l'économie finie de propriété privée : l'économie finie d'échange pur. Dans ce modèle, qui comporte un nombre fini de biens, un nombre fini de consommateurs, qui possèdent les ressources initiales, consomment les biens rendus disponibles sur le marché, au mieux de leurs préférences, dans les limites définies par leur ensemble de consommation et leur contrainte budgétaire, l'offre des ressources initiales permettant seule de satisfaire la demande des consommateurs. L'équilibre y est défini comme un ensemble de prix et de quantités consommées qui assurent à la fois l'effectivité des comportements d'optimisation de chacun des consommateurs, l'égalisation de l'offre et de la demande de chacun des biens et la dépense intégrale des revenus issus de la vente des ressources initiales.

Le mot transitif renvoie lui à l'hypothèse qui sera constamment faite tout au long de ce chapitre : *les préférences de chacun des consommateurs forment un préordre total sur son ensemble de consommation.* Cette hypothèse implique pour chacun des consommateurs la capacité de se déterminer par rapport à tout couple de points de son ensemble de consommation (totalité de la relation de préférence) et suppose une cohérence forte [1] (transitivité de la relation de préférence) de l'ensemble de leurs choix. Elle interdit par ailleurs aux préférences des consommateurs de dépendre de tout indicateur autre que leurs propres consommations.

---

(1) qui n'est, par exemple, pas réalisée dans le cas de choix à critères multiples.
Totalité et transitivité des préférences sont traditionnellement associées à l'idée de "rationalité" des choix des consommateurs.

./.

En matière d'existence de l'équilibre transitif d'une économie finie de propriété privée, les résultats initiaux et fondamentaux ont été acquis entre 1954 et 1962. L'article d'Arrow-Debreu (1954) introduisait pour l'existence de l'équilibre un ensemble d'hypothèses sur les ensembles de consommation (convexité, fermeture et limitation inférieure), les préférences des consommateurs (continuité, convexité, non saturation), les ensembles de production (convexité, fermeture, possibilité d'une production nulle pour chaque producteur) et l'ensemble de production total (impossibilité de produire sans inputs et irréversibilité de la production totale), qui, à l'exception évidemment de la totalité et de la transitivité des préférences qui définissent l'équilibre transitif et dont l'abandon fera l'objet du chapitre III, n'ont pas été - on le verra - substantiellement affaiblies par la suite et que l'on retrouve avec des variantes dans les articles immédiatement subséquents. En revanche, l'article d'Arrow-Debreu comportait deux hypothèses supplémentaires qui sont restées au centre des discussions ultérieures.

La première, dite *hypothèse de libre-disposition,* introduit la possibilité, pour la demande totale d'équilibre, de ne pas épuiser l'offre totale d'équilibre, sous réserve que le prix des biens en excédent soit nul; elle correspond à la préoccupation relativement ancienne dans la théorie néo-classique, d'expliquer par les caractéristiques et le fonctionnement du marché, l'existence de biens libres. Cette hypothèse ne devait cependant pas tarder à apparaître comme liée au théorème de point fixe utilisé pour la démonstration de l'existence de l'équilibre. En effet, si la démonstration de Arrow-Debreu (1954) reposait sur un théorème d'équilibre pour une économie abstraite, obtenu en 1952 par Debreu, dans la foulée et comme généralisation du théorème de Nash établissant l'existence d'un point d'équilibre pour un jeu non-coopératif à n-personnes, très rapidement Debreu, Gale et Nikaïdo ont établi, indépendamment et presque simultanément, le lemme qui porte leur nom et dont Kuhn (1956) a donné à la même époque une démonstration concurrente, tant de celle de Gale (1955) que de celles voisines de Debreu((1956) et (1959))et de Nikaïdo (1956). La transparence de la signification économique de ce lemme qui, appliqué à la correspondance de demande excédentaire, démontre sa négativité possible sous réserve de l'identité de Walras et de conditions de continuité et de convexité, en fait l'outil privilégié pour démontrer l'existence d'un équilibre sous l'hypothèse de libre disposition (Gale (1955) et Debreu (1959)) ou, en son absence, si comme chez Nikaïdo (1956) la mono-

./.

tonie des préférences des consommateurs (par rapport à l'ordre dans l'espace des biens, .. produit des ordres naturels sur R) garantit que la demande excédentaire d'équilibre, négative ou nulle en vertu du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu, est en fait nulle. La généralisation du lemme, contenue dans l'article de Debreu (1956), permet de lever à la fois les deux hypothèses, que l'on pouvait croire alternatives, de libre-disposition des excédents et de monotonie des préférences des consommateurs. C'est ce qui est fait par Debreu dans son article de 1962 où il n'est fait mention d'aucune hypothèse de monotonie des préférences et où la possibilité de disposition des biens en excédent apparaît comme une caractéristique éventuelle des ensembles de production et non comme une hypothèse nécessaire à la démonstration de l'existence de l'équilibre.

La raison d'être de la deuxième hypothèse, dite *hypothèse forte de survivance des consommateurs*, est plus technique. Pour garantir la semi-continuité inférieure des correspondances budgétaires qui, pour chaque consommateur, font correspondre à tout couple prix-revenu l'ensemble de ses consommations budgétairement possibles, semi-continuité nécessaire à l'application du lemme d'existence de l'équilibre d'une économie astraite, ou encore pour assurer la fermeture de la correspondance de demande excédentaire, fermeture nécessaire à l'application du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu, on est amené à supposer que le point représentant les ressources initiales de chaque consommateur est intérieur à son ensemble de consommation; ce qui signifie, en cas de libre-disposition des excédents, que le consommateur pourrait "survivre" sans participer à l'échange, en consommant strictement moins de chaque bien qu'il n'en possède initialement. L'artifice technique qui permet d'affaiblir une hypothèse, que Arrow et Debreu (1954) relaxaient déjà partiellement dans la deuxième partie de leur article, consiste à appliquer le lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu à des correspondances fermées, obtenues par une modification adéquate des correspondances de demande, à démontrer ainsi l'existence de ce que l'on définit être un *quasi-équilibre*, puis à formuler des conditions sous lesquelles ce quasi-équilibre est en fait un équilibre. En affaiblissant l'hypothèse forte de survivance, on est alors conduit à une hypothèse *d'irréductibilité de l'économie* dont l'idée est due à Gale et a été reprise par Mc. Kenzie (1959) et Debreu (1962). Ici encore, l'article de Debreu (1962), en dépit de la complication excessive des démonstrations, aboutit à une généralité des énoncés qui n'a été que marginalement dépassée depuis.

./.

Pour expliquer le propos du chapitre II, il reste à apprécier les contributions récentes de Hart et Kuhn (1975) et Bergstrom (1976) sur l'existence de l'équilibre en l'absence de l'hypothèse de libre-disposition. Les premiers font reposer leur démonstration sur un théorème sur les points fixes et antipodaux qui fait intervenir plus de topologie algébrique que nous n'avons voulu en inclure dans le chapitre I. Démontrant ensuite l'existence de l'équilibre sous des hypothèses plus restrictives et, en particulier, sous l'hypothèse forte de survivance des consommateurs, ils produisent une démonstration qui n'est plus simple et intuitive que celle de Debreu en 1962 que parce que la cause des difficultés de celle-ci réside, pour partie seulement, dans le choix du théorème de point fixe et, pour partie également, dans la complexité excessive des raisonnements qui permettent un affaiblissement des hypothèses que Hart et Kuhn ne cherchent pas à obtenir. La deuxième utilise implicitement (et donc démontre), pour établir l'existence de l'équilibre sans libre-disposition dans une économie d'échange pur, un cas particulier de l'énoncé généralisé que nous présenterons, du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu. En revanche, il donne du quasi-équilibre une définition qui permet à la fois une simplification de la démonstration d'existence du quasi-équilibre et un meilleur repérage des conditions qui, ajoutées aux conditions d'existence d'un quasi-équilibre, permettent le passage de l'existence du quasi-équilibre à l'existence de l'équilibre.

Les indications bibliographiques qui précèdent ont pour but de situer le programme du chapitre.

Parce que les démonstrations d'existence de l'équilibre reposent essentiellement sur les propriétés des préférences des consommateurs et que là seulement résident les différences entre équilibre transitif et intransitif, le cadre de la démonstration sera celui d'une économie d'échange pur comprenant ℓ biens et m consommateurs. *Les préférences de chacun des consommateurs sont supposées former un préordre total sur son ensemble de consommation.* Cette hypothèse, qui définit l'équilibre transitif, ne sera plus mentionnée. L'introduction d'activités de disposition par l'intermédiaire de la définition d'un ensemble de production total Y, réduit à un cône convexe fermé, de sommet 0 et contenu dans d'orthant négatif $(-R_+^\ell)$, permet de traiter simultanément les cas de disposition totale $(Y = -R_+^\ell)$, partielle ou nulle $(Y = \{0\})$. Les autres hypothèses sont les hypothèses les plus faibles actuellement utilisées.

./.

Le théorème de point fixe employé est une variante de l'énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu. On en donne, dans le paragraphe II, une démonstration élementaire, reposant sur le concept de partition de l'unité, qui, outre qu'elle n'existe pas dans la littérature, a l'avantage de permettre une lecture du chapitre II indépendante de celle du chapitre I et d'accès mathématique plus aisé.

La démonstration de l'existence d'un quasi-équilibre est effectuée dans le paragraphe III. Pour les raisons explicitées plus haut, on a préféré suivre Bergstrom plutôt que Debreu dans la définition du quasi-équilibre et dans la définition corrélative des correspondances semi-continues supérieurement sur l'intersection de la boule-unité et de l'ensemble polaire Y^o, auxquelles est appliqué le théorème de point fixe et qui s'identifient aux correspondances de demande pour certains systèmes de prix et sous certaines conditions de continuité des préférences des consommateurs.

Le passage, dans le paragraphe IV, de l'existence d'un quasi-équilibre à l'existence d'un équilibre repose sur l'introduction d'une condition supplémentaire de continuité des préférences des consommateurs et, en l'absence de l'hypothèse forte de survivance des consommateurs, sur une hypothèse d'irréductibilité de l'économie dont on a essayé de donner une formulation unifiant celles que l'on trouve dans la littérature.

On notera pour terminer que la technique de démonstration utilisée dans le chapitre II ne serait transposable à l'équilibre non transitif qu'au prix d'un renforcement des hypothèses de convexité des préférences (1) suceptible d'assurer la convexité des ensembles-images pour les correspondances auxquelles est appliqué l'énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu, alors que l'intérêt du chapitre III sera de montrer que d'autres techniques et un autre théorème de point fixe permettent de démontrer l'existence de l'équilibre non transitif sous les mêmes hypothèses dans lesquelles est obtenue ici l'existence de l'équilibre transitif.

./.

---

(1) Comme, par exemple, dans Bergstrom (1976)

II. UNE DEMONSTRATION DIRECTE D'UN ENONCE GENERALISE DU LEMME DE GALE-NIKAIDO-DEBREU

Le lemme de point fixe qui sera utilisé pour démontrer l'existence de l'équilibre transitif est le corollaire 5 de la proposition 7 du chapitre I. Dans le chapitre I, ce lemme apparaissait, au même titre que les théorèmes de point fixe et de surjectivité, comme une conséquence d'une variante h.c.s du théorème de non-séparation de Fan.

Pour permettre une lecture autonome du chapitre II, nous donnerons ici de ce résultat une démonstration directe et élémentaire, à partir du théorème de Brouwer, reposant sur la possibilité d'associer à tout recouvrement ouvert fini d'un sous-ensemble compact de R^{ℓ} une partition continue de l'unité faiblement subordonnée à ce recouvrement. L'intérêt d'une telle démonstration est de fournir une démonstration indirecte et également élémentaire du théorème de Kakutani.

Rappelons tout d'abord la notion de continuité (déjà introduite dans le chapitre I) que nous allons utiliser pour les correspondances définies sur un sous-ensemble A de R^{ℓ} et à valeurs dans R^{ℓ}.

Définition 1.

La correspondance $\varphi : A \to R^{\ell}$ est dite *hémi-continue supérieurement* au point x^o de A si pour tout point p de R^{ℓ}, la fonction réelle : $x \to \sup\limits_{y \in \varphi(x)} p.y$ est semi-continue supérieurement au point x^o.

On peut voir immédiatement que la semi-continuité supérieure (s.c.s.) de φ en x^o, telle qu'elle est habituellement définie [(1)], implique l'hémi-continuité supérieure (h.c.s.) de φ en x^o. Si φ est à valeurs convexes, fermées dans un compact fixe de R^{ℓ}, l'hémi-continuité supérieure de φ en tout point de A coïncide avec la semi-continuité supérieure de φ. Cela peut ne pas être vrai si φ ne prend pas ses valeurs dans un sous-ensemble compact fixe de R^{ℓ}.

./.

---

(1) La définition en a été rappelée au début du paragraphe IV du chapitre I

La forme la plus appropriée aux applications en théorie de l'équilibre général de l'énoncé généralisé du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu nous paraît être la suivante :

Lemme 1.

Soient P un cône convexe fermé, B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, S la sphère de même centre et de même rayon et ζ une correspondance définie et hémi-continue supérieurement sur $B \cap P$ et à valeurs non vides, convexes, compactes dans R^{ℓ}.

Si ζ vérifie la condition :

$\forall p \in S \cap P \;,\quad \exists\, z \in \zeta\,(p) \quad,\quad p.z \leq 0$

alors il existe $\bar{p} \in B \cap P$ tel que $\zeta\,(\bar{p}) \cap P^{o} \neq \phi$ où $P^{o} = \{z \in R^{\ell}/z.s. \leq 0,\ \forall\, s \in P\}$ est le cône polaire de P.

Démonstration.

Si l'assertion du lemme est fausse, quel que soit $p \in B \cap P$, le cône convexe fermé P^{o} et l'ensemble non vide, convexe, compact $\zeta\,(p)$ peuvent toujours être séparés par un hyperplan; quel que soit p dans $B \cap P$, il existe $q \in B$ et α réel tels que $\sup_{z \in P^{o}} q.z \leq \alpha < \inf_{z \in \zeta(p)} q.z$ et on peut voir facilement que $\alpha \geq 0$ et que $q \in P^{oo} = P$. Il résulte d'autre part de l'hémi-continuité supérieure de ζ que les ensembles

$$V\,(q) = \{p \in B \cap P/ \inf_{z \in \zeta(p)} q.z > 0\} \text{ sont ouverts dans } B \cap P.$$

Les V(q) forment ainsi un recouvrement ouvert de $B \cap P$ dont on peut extraire puisque $B \cap P$ est compact, un recouvrement fini $V(q^1)$, $V(q^2)$, ..., $V(q^n)$. Soit $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ une partition continue de l'unité faiblement subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire une famille de n fonctions numériques continues, ≥ 0, $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ vérifiant :

$$\alpha^{i}(p) = 0 \text{ si } p \notin V(q^{i}) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i}(p) = 1$$

./.

On définit $f : B \cap P \to B \cap P$ et $g : B \cap P \to S \cap P$ par :

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(p) q^i \qquad g(p) = \frac{f(p)}{\| f(p) \|}$$

Quel que soit $p \in B \cap P$, $f(p) \neq 0$ puisque si $z \in \zeta(p)$

$\alpha^i(p) \neq 0 \Rightarrow p \in V(q^i) \Rightarrow q^i.z > 0$,

ce qui implique : $f(p).z > 0$.

g est ainsi une fonction définie et continue sur $B \cap P$, à valeurs dans $(S \cap P) \subset (B \cap P)$. On peut lui appliquer le théorème de Brouwer :

$\exists\, \bar{p} \in B \cap P$, $\bar{p} = g(\bar{p}) \in S \cap P$. Or, d'une part, $\alpha^i(\bar{p}) \neq 0 \Rightarrow \inf\limits_{z \in \zeta(\bar{p})} q^i.z > 0$,

ce qui implique : $\inf\limits_{z \in \zeta(\bar{p})} \bar{p}.z > 0$.

Puisque $\bar{p} \in S \cap P$, il résulte, d'autre part, de l'hypothèse faite sur ζ dans l'énoncé du lemme qu'il existe $\bar{z} \in \zeta(\bar{p})$ tel que $\bar{p}.\bar{z} \leq 0$.
On aboutit ainsi à une contradiction.

C.Q.F.D.

Le lemme 1 est une variante de l'énoncé de Debreu (1956) et a sur celui-ci l'avantage de ne pas exclure de son champ de validité le cas où le cône convexe fermé P est une variété linéaire (ou même l'espace R^ℓ tout entier).

Il suffit de supposer successivement que P est l'orthant positif R^ℓ_+, puis que P est l'espace entier, pour obtenir les deux corollaires suivants :

Corollaire 1. (Gale-Nikaïdo-Debreu).

Si ζ est une correspondance définie et hémi-continue supérieurement sur $B \cap R^\ell_+$ et à valeurs non vides, convexes, compactes dans R^ℓ, vérifiant la condition :

$$\forall\, p \in S \cap R^\ell_+ ,\ \exists\, z \in \zeta(p) ,\ p.z \leq 0$$

alors il existe $\bar{p} \in B \cap R^\ell_+$ tel que $\zeta(\bar{p}) \cap (- R^\ell{}_+) \neq \phi$

./.

Corollaire 2. Cornet)

Si ζ est une correspondance définie et hémi-continue supérieurement sur B et à valeurs non vides, convexes, fermées dans R^ℓ, vérifiant la condition :

$$\forall\, p \in S \;,\exists\; z \in \zeta(p) \;,\; p.z \leq 0$$

alors il existe $\bar{p} \in B$ tel que $0 \in \zeta(\bar{p})$

Cornet (1975) démontre le corollaire 2 comme une conséquence d'un théorème de minimax de Ky-Fan (1972). Une version plus faible du même résultat est implicitement utilisée et démontrée par Bergstrom (1976), à partir du théorème de Kakutani. On remarquera que, dans le corollaire 2, la correspondance ζ n'est plus supposée à valeurs compactes mais seulement à valeurs fermées. La démonstration du lemme le permet puisque les sous-ensembles $\{0\}$ et $\zeta(p)$ de R^ℓ peuvent alors être séparés par un hyperplan. Cet affaiblissement des hypothèses est un avantage par rapport aux versions s.c.s. de ces trois résultats qui pourraient être classiquement démontrées à partir du théorème de Kakutani.

On remarquera aussi que, contrairement aux énoncés classiques du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu et de sa généralisation dans Debreu (1956) (ou Hildenbrand (1974)), le lemme 1 et ses corollaires ne démontrent pas que $\bar{p}$ est $\neq 0$.[1] Cet affaiblissement de la conclusion est vraisemblablement la contrepartie de l'avantage que nous voyons à ne pas devoir exclure du champ de validité du lemme 1 le cas où P est un sous-espace vectoriel de R^ℓ (et donc à pouvoir obtenir le corollaire 2).

Si la restriction de ζ à la sphère-unité est interprétée comme la correspondance d'excès de demande pour des sytèmes de prix appartenant à la boule-unité, on voit immédiatement que la condition du lemme comme de chacun de ses corollaires peut être interprétée comme un affaiblissement de la loi de Walras, la conclusion du corollaire 1 pouvant être utilisée pour établir l'existence de l'équilibre avec libre-disposition, tandis que la conclusion du corollaire 2 peut être utilisée pour établir l'existence de l'équilibre en l'absence d'hypothèse de libre-disposition.

Uzawa (1962) avait remarqué que le théorème de Kakutani pouvait se déduire du lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu. Comme on va le voir, le corollaire 2 implique également le théorème de Kakutani. ./.

---

(1) Cette remarque nous a été suggérée par G. Debreu

Corollaire 3. (Kakutani)

Si X est un sous-ensemble convexe compact de R^ℓ et si φ est une correspondance définie sur X, à valeurs dans X, semi-continue supérieurement et à valeurs non vides, convexes, fermées, alors il existe x dans X tel que $x \in \varphi(x)$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où X est la boule-unité B. Soit I l'application identique : $B \to B$ et ζ la correspondance : $B \to R^\ell$, $\zeta = \varphi - I$. ζ est évidemment semi-continue supérieurement et donc hémi-continue supérieurement, à valeurs non vides, convexes, fermées. Si d'autre part $p \in S$ et si $z = y - p$ avec $y \in \varphi(p)$, $p.z = p.y - \| p \|^2 = p.y - 1 \leq 0$. Il résulte alors du corollaire 2 qu'il existe $\bar{p} \in B$ tel que $0 \in \varphi(\bar{p}) - \bar{p}$, c'est-à-dire $\bar{p} \in \varphi(\bar{p})$.

C.Q.F.D.

III. EXISTENCE D'UN QUASI-EQUILIBRE

Soit alors $E = ((X^i, R^i, \omega^i)_{i=1...m}, Y)$ une économie d'échange comportant ℓ *biens*, m *consommateurs* et caractérisée par la donnée de m sous-ensembles X^i de R^ℓ appelés *ensembles de consommation*, de m préordres totaux R^i sur X^i représentant les *préférences* de chacun des consommateurs sur son ensemble de consommation, de m points ω^i de R^ℓ représentant les *ressources initiales* des m consommateurs et d'un *ensemble de production totale* Y supposé être un cône convexe fermé de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $(- R^\ell_+)$.

L'introduction avec Y *d'activités de disposition*, qui n'impliquent à l'équilibre aucune répartition de profits ou de pertes susceptibles de perturber les correspondances budgétaires et les correspondances de demande des consommateurs, a essentiellement pour but de faire apparaître l'équilibre avec libre-disposition et l'équilibre sans libre-disposition d'une économie d'échange pur comme les deux cas extrêmes, correspondant à $Y = - R^\ell_+$ et $Y = \{0\}$ du cas plus général qui sera

./.

traité ici. On notera cependant que les activités de disposition, permises par la technologie à rendements constants représentée par Y, y sont déjà conçues comme de véritables activités impliquant la mise en oeuvre d'inputs, dans des proportions données, pour obtenir la destruction de tel ou tel excédent.

Désignons, comme c'est classique, par P^i la partie asymétrique de la relation R^i :

$$x^i \; P^i \; x'^i \iff x^i \; R^i \; x'^i \quad \text{et non} \quad x'^i \; R^i \; x^i$$

et notons :

$$P^i(x^i) = \{x'^i \in X^i \;/\; x'^i \; P^i \; x^i\} \qquad R^i(x^i) = \{x'^i \in X^i \;/\; x'^i \; R^i \; x^i\}$$

$$(P^i)^{-1} \; (x^i) = \{x'^i \in X^i \;/\; x^i \; P^i \; x'^i\} \quad (R^i)^{-1} \; (x^i) = \{x'^i \in X^i \;/\; x^i \; R^i \; x'^i\}$$

Rappelons également les notations suivantes :

Si A est un sous-ensemble de R^ℓ, $\overline{A}$ est l'adhérence de A et conv A l'enveloppe convexe de A.

Pour tout système de prix appartenant à la sphère-unité S, il est classique de considérer les correspondances suivantes (certaines de leurs valeurs peuvent être vides) :

$$\gamma^i(p) = \{x^i \in X^i \;/\; p.x^i \leq p.\omega^i\}$$

$$\delta^i(p) = \{x^i \in X^i \;/\; p.x^i < p.\omega^i\}$$

$$\xi^i(p) = \{x^i \in X^i \;/\; x^i \in \gamma^i(p) \text{ et } \gamma^i(p) \cap P^i(x^i) = \phi\}$$

$$\varphi^i(p) = \{x^i \in X^i \;/\; x^i \in \gamma^i(p) \text{ et } \delta^i(p) \cap P^i(x^i) = \phi\}$$

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(p) - \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\}$$

$$\eta(p) = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i(p) - \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\}$$

./.

γ^i et ξ^i sont respectivement la *correspondance budgétaire* et la *correspondance de demande* du $i^{\text{ème}}$ consommateur. φ^i sera appelée *correspondance de quasi-demande* du $i^{\text{ème}}$ consommateur.

ζ et η sont respectivement les *correspondances d'excès de demande* et *d'excès de quasi-demande;* elles ne sont définies que si toutes les correspondances de demande ou de quasi-demande sont à valeurs non vides.

Une *allocation* $x = (x^1,\dots,x^m) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est dite *réalisable*

si il existe $y \in Y$ tel que $\sum_{i=1}^{m} x^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + y$, c'est-à-dire si

$$\sum_{i=1}^{m} x^i \in \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\} + Y .$$

Par définition un *équilibre* de E est un point

$(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in S \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$ vérifiant les conditions :

(1) $\forall\, i = 1,\dots,m \quad , \quad \bar{x}^i \in \xi^i(\bar{p})$

(2) $\bar{p} \in Y^o = \{p \in R^\ell \ / \ p.y \leq 0 \quad \forall\, y \in Y\}$ et $\bar{p}.\bar{y} = 0$

(3) $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \bar{y}$

La condition (1) exprime que chacune des composantes $\bar{x}^i$ de l'allocation $\bar{x}$ d'équilibre est budgétairement possible pour le $i^{\text{ème}}$ consommateur, compte-tenu de la valeur d'équilibre de ses ressources initiales, tandis qu'aucune consommation dans X^i, strictement préférée par lui à $\bar{x}^i$, n'est budgétairement possible au prix $\bar{p}$ d'équilibre.

La condition (2) exprime que $\bar{y}$ maximise sur Y la valeur d'équilibre de y, valeur maxima nulle puisque Y est un cône convexe fermé de sommet 0. Autrement dit, $\bar{y}$ minimise le coût de la disposition (- y) nécessaire pour réaliser l'équilibre et le coût de cette disposition est nul. Cette condition est sans objet si aucune disposition n'est possible

./.

$(Y = \{0\})$, tandis qu'elle garantit, si toute disposition est possible, c'est-à-dire si $Y = -(R^{\ell}_{+})$, un prix d'équilibre dont les coordonnées sont positives ou nulles et un prix nul pour les biens en excédent à l'équilibre.

Enfin la condition (3) exprime que l'allocation $\overline{x}$ est réalisable, ce qui implique non seulement l'emploi à $(-\overline{y})$ près du montant total des ressources initiales mais aussi, compte-tenu de (2), la dépense de la totalité des revenus nés de la vente des ressources initiales au prix $\overline{p}$ d'équilibre.

Suivant Bergstrom (1976), nous définissons le quasi-équilibre de E en affaiblissant la condition (1).

Un *quasi-équilibre* de E est un point $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in S \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$

vérifiant les conditions :

(1) $\forall\ i = 1,\ldots m$, $\overline{x}^i \in \varphi^i(\overline{p})$

(2) $\overline{p} \in Y^0$ et $\overline{p}.\overline{y} = 0$

(3) $\sum_{i=1}^{m} \overline{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \overline{y}$

Comme dans Debreu (1962), nous séparerons la définition de conditions suffisantes pour l'existence d'un quasi-équilibre, définition qui fait l'objet des propositions 1 et 2 ci-dessous, de la recherche, qui sera exposée dans le paragraphe IV, de conditions supplémentaires sous lesquelles ce quasi-équilibre est un équilibre.

<u>PROPOSITION 1</u>. Si une économie d'échange $E = ((X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\ldots,m}, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0 contenu dans l'orthant négatif $(-R^{\ell}_{+})$, vérifie les hypothèses :

a) $\forall\ i = 1,\ldots,m$, X^i est un sous-ensemble convexe et compact de R^{ℓ}

./.

b) $\forall\, i = 1,\dots,m$ et $\forall\, x^i \in X^i$, $(P^i)^{-1}\,(x^i)$ est ouvert dans X^i

c) $\forall\, i = 1,\dots,m$ et $\forall\, x^i \in X^i$, $x^i \notin \operatorname{conv} P^i(x^i)$

d) $\forall\, i = 1,\dots,m$, $\omega^i \in X^i - Y$

e) Si $x = (x^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est une allocation réalisable, on a

pour tout $i = 1,\dots,m$, $P^i(x^i) \neq \phi$.

alors il existe $(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point de quasi-équilibre pour E.

Démonstration.

Empruntons tout d'abord à Gale et Mas-Collel (1975) la définition des correspondances de préférence $\widehat{P^i}$ qui, substituées aux correspondances P^i, permettent de démontrer la proposition 1 avec une hypothèse e) de non saturation (en lieu et place d'une hypothèse de non-saturation locale) en toute composante d'une allocation réalisable :

$$\widehat{P^i}\,(x^i) = \{z^i \in X^i \mid z^i = x^i + \lambda(y^i - x^i)\ ,\ 0 < \lambda \leq 1\ ,\ y^i \in P^i(x^i)\}$$

Empruntons d'autre part à Bergstrom (1976) la définition des correspondances γ'^i, δ'^i, ξ'^i, ϕ'^i, *définies sur B* à valeurs dans R^ℓ et qui coïncident lorsque $p \in S$ - après substitution des correspondances $\widehat{P^i}$ aux correspondances P^i - avec les correspondances γ^i, δ^i, ξ^i, et ϕ définies plus haut :

$$\gamma'^i(p) = \{x^i \in X^i \mid p.x^i \leq \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i\}$$

$$\delta'^i(p) = \{x^i \in X^i \mid p.x^i < \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i\}$$

$$\xi'^i(p) = \{x^i \in X^i \mid x^i \in \gamma'^i(p) \text{ et } \gamma'^i(p) \cap \widehat{P^i}(x^i) = \phi\}$$

$$\phi'^i(p) = \{x^i \in X^i \mid x^i \in \gamma'^i(p) \text{ et } \delta'^i(p) \cap \widehat{P^i}(x^i) = \phi\}$$

./.

En vue d'appliquer le lemme 1 à la correspondance

$$p \to \eta'(p) = \sum_{i=1}^{m} \phi'^{i}(p) - \{\sum_{i=1}^{m} \omega^{i}\}$$

nous allons démontrer successivement la fermeture sur B des correspondances ϕ'^{i}, puis la non-vacuité et la convexité de leurs ensembles-images pour tout p de $B \cap Y^{o}$.

Fermeture de ϕ'^{i}.

Soient (p^k) et (x^{ik}) deux suites d'éléments de B et X^i respectivement, vérifiant :

$$\lim_{k\to\infty} p^k = p, \ \lim_{k\to\infty} x^{ik} = x^i \quad \text{et} \quad x^{ik} \in \phi'^{i}(p^k) \quad \forall\, k \in N .$$

De la fermeture de γ'^{i} et de $x^{ik} \in \gamma'^{i}(p^k)$ $\forall\, k \in N$, on déduit immédiatement $x^i \in \gamma'^{i}(p)$. Distinguons deux cas selon que $p.x^i$ est strictement inférieur ou égal à $\dfrac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$.

Si $p.x^i < \dfrac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$ et si il existe $y^i \in P^i(x^i)$, on peut trouver K' et, grâce à l'hypothèse b) , k" tels que :

$$k > K' \Rightarrow p^k.x^{ik} < \frac{1 - \|p^k\|}{m} + p^k.\omega^i$$

$$k > k'' \Rightarrow x^{ik} \in (P^i)^{-1}(y^i) \text{ , c'est-à-dire } y^i \in P^i(x^{ik})$$

Il en résulte alors de la définition de $\widehat{P^i}$ que :

$$k > \sup(k',k'') \Rightarrow \delta'^{i}(p^k) \cap P^i(x^{ik}) \neq \phi$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur x^{ik} .

Si $p.x^i = \dfrac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$ et si il existe $z^i \in \delta'^{i}(p) \cap \widehat{P^i}(x^i)$, on déduit de la définition de $\widehat{P^i}$ l'existence de $y^i \in (\delta'^{i}(p) \cap P^i(x^i))$.

Soient alors K' et , en vertu de l'hypothèse b), K" tels que :

$$k > k' \Rightarrow y^i \in \delta'^{i}(p^k)$$

$$k > k'' \Rightarrow y^i \in P^i(x^{ik})$$

./.

On a : $k > \sup(k',k") \Rightarrow y^i \in (\delta'^i(p^k) \cap P^i(x^{ik})) \subset (\delta'^i(p^k) \cap \hat{P}^i(x^{ik}))$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur x^{ik}.

On a finalement : $P^i(x^i) = \phi$ si $p\, x^i < \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$ et $\delta'^i(p) \cap \hat{P}^i(x^i) = \phi$ si $p.x^i = \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$. Dans les deux cas, $x^i \in \phi'(p)$.

- <u>Non-vacuité de $\phi'^i(p)$ pour tout p de $B \cap Y^o$</u>.

Puisque $\xi'^i(p) \subset \phi'^i(p)$, il suffit de démontrer que quel que soit p dans $B \cap Y^o$, $\xi'^i(p) \neq \phi$. L'hypothèse d) garantit la non-vacuité de $\gamma'^i(p)$ et, il en résulte des hypothèses a), b), c) et du corollaire 1 de la proposition 5 du chapître I, qu'il existe x^i dans $\gamma'^i(p)$ tel que $\gamma'^i(p) \cap P^i(x^i) = \phi$.

Si $P^i(x^i) = \phi$, on a évidemment $\gamma'^i(p) \cap \hat{P}^i(x^i) = \phi$ et $x^i \in \xi'^i(p)$.

Si $P^i(x^i) = \phi$ et si $y^i \in P^i(x^i)$, soit z^i le point où le segment d'extrémités x^i et y^i rencontre l'hyperplan d'équation : $p.z = \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$

Par définition de x^i et puisque R^i est un préordre total : $x^i R^i z^i$.

Par transitivité du préordre : $y^i P^i z^i$ et il résulte de l'hypothèse c) que x^i et z^i sont équivalents pour le préordre R^i. On a alors :

$\gamma'^i(p) \cap P^i(z^i) = \phi$. Puisque $p.z^i = \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$, on en déduit : $\gamma'^i(p) \cap \hat{P}^i(z^i) = \phi$ et $z^i \in \xi'^i(p)$.

- <u>Convexité de $\phi'^i(p)$</u>.

Soient x^i et $x'^i \in \phi'^i(p)$ et y^i sur le segment d'extrémités x^i et x'^i.

Si x^i ou x'^i appartient à $\delta'^i(p)$, il résulte de la définition de ϕ'^i et de la totalité du préordre que x^i et x'^i sont équivalents, puis de l'hypothèse c) et de la définition de ϕ'^i que y^i est équivalent à x^i et x'^i. On en déduit $y^i \in \phi'^i(p)$.

Si x^i et x'^i appartiennent à l'hyperplan d'équation : $p.z = \frac{1 - \|p\|}{m} + p.\omega^i$ il en est de même de y^i et $\hat{P}^i(y^i) \cap \delta'^i(p) \neq \phi \Rightarrow P^i(y^i) \cap \delta'^i(p) \neq \phi$.

./.

Si $z^i \in P^i(y^i) \cap \delta'^i(p)$, il résulte de l'hypothèse c) et de la transitivité du préordre que les assertions $x^i R^i z^i$ et $x'^i R^i z^i$ ne sont pas possibles simultanément.

Par totalité du préordre, on a par exemple :
$z^i \in (P^i(x^i) \cap \delta'^i(p)) \subset (\hat{P}^i(x^i) \cap \delta'^i(p^i))$, ce qui est impossible.
On en déduit $y^i \in \varphi'^i(p)$.

Par construction, la correspondance η' définie plus haut, est ainsi fermée, à valeurs non vides et convexes pour tout p de $B \cap Y^o$. Puisqu'elle prend, en vertu de l'hypothèse a), ses valeurs dans le sous-ensemble compact de R^ℓ : $\sum_{i=1}^{m} X^i - \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\}$, la fermeture de η' est équivalente à la conjonction de sa semi-continuité supérieure et de la fermeture de ses ensembles images.

D'autre part, quels que soient $p \in S \cap Y^o$ et $z \in \eta'(p)$, $z = \Sigma x^i - \Sigma \omega^i$ avec pour tout $i = 1,\ldots,m$, $x^i \in \varphi'^i(p) = \varphi^i(p)$; on a ainsi :

$$p.x^i \leq p.\omega^i \quad , \quad \forall\ i = 1,\ldots,m \quad \text{et} \quad p.z \leq 0 \ .$$

On peut donc appliquer le lemme 1 : il existe $\bar{p} \in B \cap Y^o$ et $\bar{y} \in Y^{oo} = Y$ tels que $\bar{y} \in \eta'(p)$; ou,encore,il existe

$$(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (B \cap Y^o) \times \sum_{i=1}^{m} X^i \times Y \text{ tel que :}$$

$$\bar{x}^i \in \varphi^i(\bar{p}) \quad \forall\ i = 1,\ldots,m \quad \text{et}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \bar{y} \ .$$

De l'hypothèse e), on déduit : $\bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i + \dfrac{1 - \|\bar{p}\|}{m}$, $\forall\ i = 1,\ldots,m$

et par sommation sur i, $\bar{p}.\bar{y} = 1 - \|\bar{p}\|$. Puisque $\bar{p} \in Y^o$, $\|\bar{p}\| = 1$, c'est-à-dire $\bar{p} \in S$, et $\bar{p}.\bar{y} = 0$

On a alors, pour tout $i = 1,\ldots,m$, $\bar{x}^i \in \gamma^i(\bar{p})$, $\delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{x}^i) = \phi$ et,

a fortiori : $\delta^i(\bar{p}) \cap P^i(\bar{x}^i) = \phi$. $(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \sum_{i=1}^{m} X^i \times Y$ est un point quasi-équilibre de E.

C.Q.F.D.

Parmi les hypothèses sous lesquelles a été démontrée la proposition 1, l'hypothèse b) est une hypothèse de *continuité*. On remarquera que sous cette hypothèse, chacun des préordres totaux de préférence R^i

./.

est représentable par une fonction d'utilité u^i, semi-continue supérieurement sur X^i (1). L'hypothèse c) est une hypothèse de *convexité* équivalente, si les préordres de préférence sont totaux, à la convexité, pour tout consommateur i et pour tout point x^i de son ensemble de consommation, de l'ensemble $P^i(x^i)$ des éléments de X^i strictement préférés à x^i. L'hypothèse d) est une hypothèse faible de *survivance des consommateurs* : tout consommateur a la possibilité de ne pas participer à l'échange puisqu'il peut consommer, après une disposition éventuelle, ses ressources initiales. L'hypothèse e) suppose la *non-saturation* de chacun des consommateurs en toute composante d'une allocation réalisable.

Dans l'hypothèse a), supposer que les ensembles de consommation sont bornés apparaît trop restrictif pour un modèle général dont une spécification fréquente suppose justement que les ensembles de consommation de tous les consommateurs sont égaux à l'orthant positif de R^ℓ. On peut lever cette hypothèse en appliquant la proposition 1 à une économie obtenue en intersectant les ensembles de consommation non bornés par une boule fermée de centre 0 et de rayon convenablement choisi. C'est ce qui va être fait dans la proposition suivante.

Proposition 2.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, R^i, \omega^i)_{i=1,\ldots,m}, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe, fermé, Y, de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $(-R^\ell_+)$, vérifie les hypothèses :

a) $\forall\ i = 1,\ldots,m$, X^i est un sous-ensemble convexe fermé de R^ℓ borné inférieurement pour l'ordre partiel sur R^ℓ produit des ordres naturels sur R

b) $\forall\ i = 1,\ldots,m$ et $\forall\ x^i \in X^i$, $(P^i)^{-1}(x^i)$ est ouvert dans X^i

c) $\forall\ i = 1,\ldots,m$ et $\forall\ x^i \in X^i$, $x^i \notin \text{conv}\ P^i(x^i)$

d) $\forall\ i = 1,\ldots,m$, $\omega^i \in X^i - Y$

e) Si $x = (x^i) \in \prod_{i=1}^m X^i$ est une allocation réalisable, on a pour tout $i = 1,\ldots,m$, $P^i(x^i) \neq \phi$

Alors il existe $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y$, point de quasi-équilibre pour E. ./.

---

(1) cf. T. RADER (1963). Voir aussi G. DEBREU (1964)

Démonstration.

Désignons par $\tilde{X}^i$, pour chaque i = 1,...,m, *l'ensemble réalisable pour le i^ème^ consommateur* :

$$\tilde{X}^i = \{x^i \in X^i | x^i + \sum_{j\neq i} x^j = \sum_{j=1}^{m} \omega^j + y \ , \ x^j \in X^j \ \forall\ j \neq i \text{ et } y \in Y\} .$$

Il résulte des différents éléments de l'hypothèse a) et de la définition de Y que chaque $\tilde{X}^i$ est un sous-ensemble convexe, borné et fermé de R^ℓ. Il résulte d'autre part de l'hypothèse d) que chaque $\tilde{X}^i$ est non vide. On déduit alors des hypothèses b) et c) et du corollaire 1 de la proposition 5 du chapitre I l'existence de $x^{io} \in \tilde{X}^i$ tel que $P^i(x^{io}) \cap \tilde{X}^i = \phi$, et, de l'hypothèse e), l'existence de $x'^{io} \in P^i(x^{io})$ ou encore, par transitivité et totalité de R^i : $x'^{io} \in P^i(x^i), \forall\ x^i \in \tilde{X}^i$.

Soit alors r un nombre réel positif tel que la boule ouverte $B_o(0,r)$ contienne pour tout i = 1,...,m , $\tilde{X}^i$ et x'^{io} .

Pour tout i = 1,...,m, posons $X^{ir} = X^i \cap B_f(0,r)$ où $B_f(0,r)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon r; désignons d'autre part par R^{ir} le préordre total induit sur X^{ir} par le préordre R^i et considérons l'économie :

$$E^r = ((X^{ir},R^{ir},\omega^i)_{i=1,...,m}, Y) .$$

E^r vérifie les hypothèses de la proposition 1 et admet donc un point $(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^{ir} \times Y$ vérifiant :

$$(1)\ \forall\ i = 1,...,m \ , \ \bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i \quad \text{et} \quad \delta^i(\bar{p}) \cap P^{ir}(\bar{x}^i) = \phi$$

$$(2)\ \bar{p} \in Y^o \quad \text{et} \quad \bar{p}.\bar{y} = 0$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i + \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \bar{y}$$

La relation (3) montre que chacun des $\bar{x}^i$ appartient à $\tilde{X}^i \subset (X^i \cap B_o(0,r))$. S'il existait $z^i \in \delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{x}^i)$, il existerait sur le segment joignant $\bar{x}^i$ à z^i des points de $\delta^i(\bar{p}) \cap \widehat{P^{ir}}(\bar{x}^i)$, contrairement au fait que $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ est un quasi-équilibre de E^r . $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ est ainsi un quasi-équilibre de E vérifiant :

$$\forall\ i = 1,...,m \ , \ \bar{p}.\bar{x} = \bar{p}.\omega^i \text{ et } \delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{x}^i) = \phi$$

C.Q.F.D.

./.

IV. DU QUASI-EQUILIBRE A L'EQUILIBRE

Le passage du quasi-équilibre à l'équilibre nécessite l'adjonction d'hypothèses supplémentaires que justifie la proposition suivante :

Proposition 3.

Sous l'hypothèse :

$\forall\ x^i \in X^i\ ,\ z^i \in P^i(x^i)$ et $v^i \in X^i \Rightarrow \exists\ \lambda\ ,\ 0 < \lambda \leq 1$ et

$(\lambda v^i + (1 - \lambda)z^i) \in P^i(x^i)$

$\psi^i(p)$ coïncide avec $\xi^i(p)$ en tout point p de S pour lequel $\delta^i(p) \neq \phi$

Démonstration.

Soit, en effet, $p \in S$ tel que $\delta^i(p) \neq \phi$ et $x^i \in \phi^i(p)$. Si $z^i \in \gamma^i(p) \cap P^i(x^i)$ et si $v^i \in \delta^i(p)$, soit λ tel que $0 < \lambda \leq 1$ et $(\lambda v^i + (1 - \lambda)z^i) \in P^i(x^i)$. Puisque $\lambda > 0$,

$(\lambda v^i + (1 - \lambda)z^i) \in \delta^i(p) \cap P^i(x^i)$, contrairement à l'hypothèse faite sur x^i . On a ainsi $x^i \in \xi^i(p)$ et $\phi^i(p) \subset \xi^i(p)$. Puisque $\xi^i(p) \subset \phi^i(p)$ quel que soit p dans S , on a bien démontré que

$$\delta^i(p) \neq \phi \Rightarrow \phi^i(p) = \xi^i(p) .$$

C.Q.F.D.

Pour assurer que le quasi-équilibre $(\overline{p}.\overline{x}.\overline{y})$, obtenu sous les hypothèses de la proposition 2, soit un équilibre, il reste à trouver des hypothèses garantissant la non-vacuité de $\delta^i(\overline{p})$, pour tout i = 1,...,m. Supposer que pour tout i = 1,...,m, ω^i appartient à l'intérieur de$(X^i - Y)$ $(i(X^i - Y))$ est la façon la plus simple d'obtenir ce résultat :

Proposition 4.

Si une économie d'échange $E = (X^i, R^i, \omega^i, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet O, contenu dans l'orthant négatif $(- R^\ell_+)$, vérifie les hypothèses a), b), c) et e) de la proposition 2 ainsi que :

b') $\forall$ i = 1,...,m et $\forall\ x^i \in X^i$

$z^i \in P^i(x^i)$ et $v^i \in X^i \Rightarrow \exists\ \lambda\ ,\ 0 < \lambda < 1$

et $\lambda v^i + (1 - \lambda)z^i \in P^i(x^i)$

./.

d) $\forall$ i = 1,...,m, $\omega^i \in i(X^i - Y)$

Alors il existe $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point d'équilibre de E.

Démonstration.

Soit, en effet, $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$ un point de quasi-équilibre pour E (proposition 2). Quel que soit i = 1,...,m, la variété linéaire $\{z \in R^{\ell} | \overline{p}.z = \overline{p}.\omega^i\}$ est de dimension $(\ell - 1)$ (puisque $\overline{p} \neq 0$) et ne contient pas $(X^i - Y)$ qui est de dimension ℓ (hypothèse d). Soit donc $z \in X^i - Y$ tel que $\overline{p}.z \neq p.\omega^i$. Puisque $\omega^i \in i(X^i - y)$, il existe $\lambda > 0$ assez petit pour que $(\omega^i - \lambda(z - \omega^i))$ appartienne à $X^i - Y$. Si $z = x^i - y$ avec $x^i \in X^i$, $y \in Y$ et si $\omega^i - \lambda(z - \omega^i) = x'^i - y'$ avec $x'^i \in X^i$, $y' \in Y$, selon que $\overline{p}.z < \overline{p}.\omega^i$ ou $\overline{p}.z > \overline{p}.\omega^i$ et puisque $\overline{p} \in Y^o$, l'un des points x^i ou x'^i appartient à $\delta^i(\overline{p})$ qui est ainsi non vide. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3 pour voir que $(\overline{p}.\overline{x}.\overline{y})$ est un équilibre de E.

C.Q.F.D.

L'hypothèse b'), due à Bergstrom (1976) est impliquée par l'hypothèse de continuité plus traditionnelle :

b") $\forall$ i = 1,...,m et $\forall x^i \in X^i$, $P^i(x^i)$ est ouvert dans X^i.

Dans l'équilibre transitif qui fait l'objet de ce chapitre, c'est-à-dire lorsque les préférences de chacun des consommateurs forment un préordre total sur son ensemble de consommation, l'hypothèse b") et l'hypothèse b) garantissent conjointement que les graphes de toutes les relations strictes P^i des préordres R^i sont des sous-ensembles ouverts respectivement de chacun des ensembles produits $X^i \times X^i$. Cette dernière hypothèse est l'hypothèse de continuité la plus généralement faite dans l'étude des conditions d'existence de l'équilibre transitif comme de l'équilibre intransitif.

./.

L'hypothèse d) n'est autre que ce que nous avons appelé *l'hypothèse forte de survivance des consommateurs*. Dans le cas de libre-disposition ($Y = - R_+^\ell$), elle est équivalente à l'énoncé habituel selon lequel *tout consommateur peut consommer strictement moins de chaque bien que n'en comporte sa dotation initiale* ($\forall\, i = 1,\ldots,m,\ \exists\ x^i \in X^i\ ,\ x^i \ll \omega^i$).
Dans le cas où aucune disposition n'est possible ($Y = \{0\}$) et compte-tenu de la convexité des X^i, elle énonce que *tout consommateur peut consommer strictement moins et strictement plus de chaque bien que n'en comporte sa dotation initiale.*

Cette hypothèse est généralement considérée comme peu réaliste. Elle enlève d'ailleurs tout intérêt à la distinction des notions de quasi-équilibre et d'équilibre, puisque l'application du lemme 1 à la correspondance : $p \to \zeta'(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi'^{i}(p) - \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\}$ fournit alors directement des conditions d'existence d'un équilibre. On peut l'affaiblir en introduisant en contrepartie une hypothèse supplémentaire d'irréductibilité de l'économie dont la formulation fera l'objet des définitions suivantes inspirées de Debreu (1962), Bergstrom (1976) et Arrow-Hahn (1971).

Définition 1.

Une économie d'échange $E = ((X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\ldots,m},Y)$ comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif ($- R_+^\ell$), est dite *Debreu-irréductible* si pour tout sous-ensemble J, propre et non vide de $I = \{1,\ldots,m\}$, et pour toute allocation réalisable (x^i), il existe $(x'^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ vérifiant :

$$(1)\quad x'^i \in \overline{\widehat{P^i}(x^i)}\quad \forall\, i \in J \text{ et } \exists\, j \in J\ ,\ x'^j \in \widehat{P^j}(x^j)$$

$$(2)\quad \sum_{i\in J} x'^i - \sum_{i\in J} x^i - \sum_{i\in I\setminus J} (\omega^i - x^i) \in Y$$

Autrement dit, une économie d'échange est Debreu-irréductible si pour tout sous-ensemble J, propre et non vide de I, et pour toute allocation réalisable (x^i), il existe, après une éventuelle disposition de surplus non utilisés, une distribution de $\sum_{i\in J} x^i + \sum_{i\in I\setminus J} (\omega^i - x^i)$ aux consommateurs du groupe J globalement préférée par eux, au sens des relations (1), à l'allocation $(x^i)_{i\in J}$.

./.

On remarquera que si les préférences sont convexes (c'est-à-dire si, pour tout i, la relation stricte $\widehat{P^i}$ est confondue avec P^i) et si elles vérifient l'hypothèse de continuité des propositions 1 et 2 (pour tout $x^i \in X^i$ tel que $P^i(x^i) \neq \phi$, on a alors : $R^i(x^i) = \overline{P^i(x^i)}$), les relations (1) s'écrivent :

$$x'^i \in R^i(x^i) \quad \forall\, i \in J \quad \text{et} \quad \exists\, j \in J \;,\; x'^j \in P^j(x^j) \;.$$

On retrouve ainsi la définition de l'irréductibilité donnée par Debreu (1962).

Définition 2.

Une économie d'échange $E = ((X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\dots,m},Y)$ est dite *Arrow-Hahn-irréductible* si pour tout sous-ensemble J, propre et non vide de $I = \{1,\dots,m\}$, et pour toute allocation réalisable (x^i), il existe $(x'^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ vérifiant les relations (1) de la définition 1 et :

$$(2) \quad \forall\, k = 1,\dots,\ell, \quad \sum_{i\in J} x'^i_k > \sum_{i\in J} x^i_k \Rightarrow \text{il existe}$$

$$i \in I\backslash J \quad \text{et} \quad \lambda^i_k > 0 \text{ tels que } \omega^i - \lambda^i_k e^k \in X^i - Y$$

$$\sum_{i\in J} x'^i_k < \sum_{i\in J} x^i_k \Rightarrow \text{il existe}$$

$$i \in I\backslash J \quad \text{et} \quad \lambda^i_k > 0 \text{ tels que } \omega^i + \lambda^i_k e^k \in X^i - Y$$

Définition 3.

Une économie d'échange $E = ((X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\dots,m},Y)$ est dite *Bergstrom-irréductible* si pour tout sous-ensemble J, propre et non vide de $I = \{1,\dots,m\}$ et pour toute allocation réalisable (x^i), il existe une allocation (x'^i) et un système de m nombres $\theta^i > 0$, $i = 1,\dots,m$ vérifiant les relations (1) de la définition 1 et

$$(2) \quad \sum_{i\in I} \theta^i (x'^i - \omega^i) \in Y \;.$$

./.

Proposition 5.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, R^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y))$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif de R^ℓ, vérifie les hypothèses a), b), c) de la proposition 2, b') de la proposition 4 et

d) $\forall\ i = 1,\dots,m\ ,\ \omega^i \in X^i - Y$ et $\sum_{i=1}^m \omega^i \in i(\sum_{i=1}^m X^i - Y)$

e) E est Bergstrom-irréductible

alors il existe $(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (S \cap Y^o)\ \prod_{i=1}^m X^i \times Y$, point d'équilibre de E.

Démonstration.

L'hypothèse e) de la proposition 5 impliquant la non-saturation en toute composante d'une allocation réalisable, c'est-à-dire l'hypothèse e) de la proposition 2, soit $(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y$ un point de quasi-équilibre de E vérifiant, en outre, comme on l'a vu plus haut :
$\forall\ i = 1,\dots,m\ ,\ \bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i$ et $x'^i \in \hat{P}^i(\bar{x}^i) \Rightarrow \bar{p}.x'^i \geq \bar{p}.\bar{x}^i$.

Désignons par J le sous-ensemble de I : $J = \{i \in I/\delta^i(\bar{p}) \neq \phi\}$.

Puisque $\bar{p} \neq 0$, la variété linéaire $\{z \in R^\ell/\bar{p}.z = \bar{p}.\sum_{i=1}^m \omega^i\}$ est de de dimension $(\ell - 1)$ et ne contient pas $(\sum_{i=1}^m X^i - Y)$ qui est, d'après l'hypothèse d), de dimension ℓ . Comme dans la démonstration de la proposition 4, on en déduit l'existence de $z \in \sum_{i=1}^m X^i - Y$ tel que

$\bar{p}.z < \bar{p}.\sum_{i=1}^m \omega^i$, ce qui montre que $J \neq \phi$.

Soient alors, si $J \neq I$, et puisque E est Bergstrom-irréductible, $(x'^i) \in \prod_{i=1}^m X^i$ et $\theta^i > 0$ vérifiant par rapport à $(\bar{x}^i)$ les relations (1) et (2) de la définition 3.

./.

On déduit de la proposition 3 : $\overline{p}.\sum_{i\in J}\theta^i(x'^i-\omega^i)>0$ et, en vertu de (2), $\overline{p}.\sum_{i\in I\setminus J}\theta^i(x'^i-\omega^i)<0$. Il existe donc $i\in I\setminus J$ tel que

$\theta^i\overline{p}.(x'^i-\omega^i)<0$, contrairement à la définition de

$I\setminus J=\{i\in I/\delta^i(\overline{p})=\phi\}$

C.Q.F.D.

Corollaire 1. (Bergstrom)

La conclusion de la proposition 5 reste vraie si l'hypothèse e) est remplacée par :

e) Pour toute allocation réalisable (x^i) et pour tout $j=1,\dots,m$, il existe $(x'^i)\in\prod_{i=1}^{m}X^i$ et $\theta^j>0$ tels que :

$$x'^i\in P^i(x^i)\quad\forall\, i\neq j\quad\text{et}\quad\sum_{i\neq j}(x'^i-\omega^i)+\theta^j(x'^j-\omega^j)\in Y$$

Corollaire 2. (Debreu)

La conclusion de la proposition 5 reste vraie si l'hypothèse e) est remplacée par :

e) E est Debreu-irréductible.

Démonstration.

Il suffit de vérifier qu'une économie Debreu-irréductible est Bergstrom-irréductible (1). Soient, en effet, J un sous-ensemble propre de E, (x^i) une allocation réalisable et (x'^i) une allocation vérifiant par rapport à (x^i) les conditions (1) et (2) de la définition 1.

On déduit par addition de la relation (2) de la définition 1 et de la relation

$$\left(\sum_{i\in I}x^i-\sum_{i\in I}\omega^i\right)\in Y$$

$$\sum_{i\in J}(x'^i-\omega^i)+2\sum_{i\in I\setminus J}(x^i-\omega^i)\in Y$$

de sorte que l'allocation (x''^i) définie par :

$$x''^i=x'^i\quad\text{si}\quad i\in J$$
$$x''^i=x'\quad\text{si}\quad i\in I\setminus J$$

vérifie les conditions de la définition 3.

C.Q.F.D. ./.

---

(1) Il en est de même d'ailleurs pour d'autres définitions alternatives de l'irréductibilité, comme celle de Mc. Kenzie.

Corollaire 3.

La conclusion de la proposition 5 reste vraie si l'hypothèse e) est remplacée par :

e) E est Arrow-Hahn-irréductible.

Démonstration.

Plutôt que de démontrer que l'Arrow-Hahn-irréductibilité implique la Bergstrom-irréductibilité, nous démontrerons directement ce corollaire.

Soit, comme dans la démonstration de la proposition 5, $(\overline{p},\overline{x},\overline{y})$ un quasi-équilibre de E et $J = \{i \in I / \delta^i(p) \neq \phi\}$. L'hypothèse d) montre que $J \neq \phi$.

Si d'autre part $J \neq I$, soit (x'^i) vérifiant par rapport à $(\overline{x}^i)$ les conditions (1) et (2) de la définition (2). Il résulte des conditions (1) et de la définition de J que :

$\sum_{i \in J} \overline{p}.x'^i > \sum_{i \in J} \overline{p}.\overline{x}^i$, de sorte qu'il existe $k \in \{1,\dots,\ell\}$

tel que $\overline{p}_k(\sum_{i \in J} x'^i_k - \sum_{i \in J} x^i_k) > 0$

D'après les conditions (2), il existe alors $i \in I \backslash J$ tel que $\delta^i(\overline{p}) = \phi$, contrairement à la définition de $I \backslash J = \{i \in I / \delta^i(\overline{p}) = \phi\}$

C.Q.F.D.

On notera pour terminer que, sous réserve d'un léger renforcement de l'hypothèse d), la *désirabilité de tout bien, pour tout consommateur, en toute composante d'une allocation réalisable* est un cas particulier de la Bergstrom-irréductibilité. Ceci permet d'établir le corollaire suivant :

Corollaire 4.

La conclusion de la proposition 5 reste vraie si les hypothèses d) et e) sont respectivement remplacées par :

d) $\forall\, i = 1,\dots,m$, $\exists\, z^i \in X^i$, $z^i < \omega^i$ et $\sum_{i=1}^{m} \omega^i \in i(\sum_{i=1}^{m} X^i - Y)$

e) pour toute allocation réalisable (x^i), pour tout : $1,\dots,m$ et pour tout $k = \{1,\dots,\ell\}$ il existe $\lambda_k^i > 0$ tel que $x^i + \lambda_k^i e^k \in P^i(x^i)$.

On a de plus à l'équilibre $(\overline{p},\overline{x},\overline{y})$: $\overline{p} >> 0$, et $\overline{y} = 0$ (les prix d'équilibre sont strictement positifs et l'équilibre est réalisé sans disposition d'excédents).

Démonstration.

Soit $(\overline{p},\overline{x},\overline{y})$ un quasi-équilibre de $E = (X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\dots,m},Y))$.

Comme on l'a vu à plusieurs reprises, il résulte de la 2ème partie de l'hypothèse d) qu'il existe i tel que $\delta^i(\overline{p}) \neq \phi$. Si $\overline{p}_k \leq 0$, soit alors $\lambda_k^i > 0$ tel que $\overline{x} + \lambda_k^i e^k \in P^i(x^i)$; $\overline{p}.(\overline{x}^i+\lambda_k^i e^k) \leq \overline{p}.\omega^i$, contrairement au fait que $\overline{x}^i \in \Psi^i(\overline{p}) = \xi^i(\overline{p})$.

On a donc $\overline{p} >> 0$ et de $\overline{p}.\overline{y} \leq 0$ et $\overline{y} \leq 0$, on déduit $\overline{y} = 0$.

Ces remarques conduisent à rechercher un quasi-équilibre $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in (S \cap R_+^\ell) \times \prod_{i=1}^m X^i \times (-R_+^\ell)$ pour l'économie $E' = ((X^i,R^i,\omega^i)_{i=1,\dots,m},(-R^{\ell+}))$.
La proposition 2 montre qu'un tel quasi-équilibre existe et il résulte de ce qui précède que c'est aussi un quasi-équilibre de E.

Il reste à vérifier que E est Bergstrom-irréductible.

Soient (x^i) une allocation réalisable, J un sous-ensemble propre et non vide de I et i_1 et i_2 deux éléments quelconques respectivement de J et I\J. Il résulte de la convexité de X^{i_2} et de $P^{i_1}(x^{i_1})$, de la définition de $\hat{P}^{i_1}$ et de la première partie de l'hypothèse d) qu'il existe $z^{i_2} \in X^{i_2}$ tel que :

$$z^{i_2} < \omega^{i_2} \quad \text{et} \quad x^{i_1} + (\omega^{i_2} - z^{i_2}) \in \hat{P}^{i_1}(x^{i_1})$$

Si on pose : $x'^i = x^i \quad , \ i \neq i_1 \ \text{ et } \ i \neq i_2$

$$x'^{i_1} = x^{i_1} + (\omega^{i_2} - z^{i_2})$$

$$x'^{i_2} = \frac{x^{i_2} + z^{i_2}}{2}$$

./.

On a : $\sum_{i\in J} x'^{i} - \sum_{i\in J} x^{i} = \omega^{i_2} - z^{i_2}$, ou encore :

$$\sum_{i\neq i_2} (x'^{i} - \omega^{i}) + 2(x^{i_2} - \omega^{i_2}) = 0 ,$$

ce qui montre que E est Bergstrom-irréductible.

C.Q.F.D.

Le corollaire 4 est applicable au cas où les consommateurs ont des préférences *monotones* ($x^{i} < x'^{i} \Rightarrow x'^{i} \in P^{i}(x^{i})$) sur des ensembles de consommation égaux à l'orthant positif de R^{ℓ}. Si on remarque qu'on peut éliminer de l'échange les consommateurs qui ont une dotation initiale nulle, il établit l'existence d'un équilibre, réalisé sans disposition d'excédents et à des prix strictement positifs, pour une économie vérifiant les hypothèses b) et c) de la proposition 2, b') de la proposition 4 et :

d) $\forall\ i = 1,\ldots,m$, $\omega^{i} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \omega^{i} >> 0$.

°
° °

./.

C H A P I T R E   I I I

L'EQUILIBRE INTRANSITIF

I. INTRODUCTION

L'équilibre non transitif (ou intransitif) se définit, a contrario, de l'équilibre transitif par le fait que *les préférences des consommateurs ne sont pas supposées former un préordre total sur leur ensemble de consommation.*

Cette définition purement négative conduit à inclure, en premier lieu, dans l'équilibre intransitif le cas où les préférences larges des consommateurs (préférence stricte ou équivalence) sont supposées former *seulement un préordre partiel* sur leur ensemble de consommation, c'est-à-dire le cas où les choix potentiels des consommateurs, tout en possédant la cohérence de la transitivité, ne peuvent suffire à classer tous les couples de paniers de biens potentiellement offerts à leur consommation. L'objection de la vraisemblance empirique de préférences non totales (ou incomplètes) a été la première mise en cause de la rationalité des consommateurs.

L'équilibre intransitif permet aussi d'abandonner outre la transitivité des seules relations d'indifférence liée à la totalité des relations de préférence larges (la notion d'indifférence englobant ici les deux notions complémentaires d'équivalence et de non-comparabilité) toute hypothèse de transitivité des relations de préférence stricte. L'intransitivité est alors envisagée dans son acception la plus radicale.

Enfin, le remplacement, pour la représentation des préférences, des relations binaires que sont des préordres totaux sur les ensembles de consommation, par des correspondances pouvant éventuellement dépendre explicitement d'autres arguments, permet d'introduire dans l'équilibre intransitif, à côté des intransitivités possibles dans la comparaison deux à deux des paniers de biens, la possibilité d'un certain nombre d'externalités, comme la dépendance des préférences par rapport aux consommations des autres consommateurs ou par rapport aux prix du marché. On notera cependant que la prise en compte d'externalités dans les préférences n'est pas nécessairement liée à l'abandon de la transitivité et qu'une notion aussi essentiellement transitive que celle d'utilité permet également de faire dépendre la satisfaction de chaque consommateur des consommations des autres consommateurs et des prix du marché. On trouve ainsi dans Mc Kenzie (1955) un traitement de

./.

l'équilibre transitif avec des externalités de consommation et dans Arrow-Hahn (1971, chapitre VI) une extension de l'existence de l'équilibre transitif au cas où les utilités dépendent des prix. De telles extensions ne sont cependant pas possibles dans le cadre de l'approche en termes de demande excédentaire que nous avons adoptée dans le chapitre II.

La raison d'être de la définition que nous avons adoptée de l'intransitivité réside dans le rôle que jouent, pour l'existence de l'équilibre transitif, la transitivité et la totalité des préférences. Si on relit attentivement les démonstrations du chapitre II, on verra, en effet, que nous avons utilisé à plusieurs reprises ces deux propriétés. Parfois parce qu'elles facilitaient l'obtention de résultats intermédiaires qui auraient pu être obtenus sans elles ; nous aurons ainsi dans ce chapitre l'occasion d'adapter à l'équilibre intransitif des procédures de démonstration empruntées à l'équilibre transitif. En un cas, cependant, l'adaptation est impossible : transitivité et totalité des préférences permettent dans l'équilibre transitif d'établir la convexité des ensembles-images des correspondances de quasi-demande, convexité évidemment nécessaire à l'application du lemme 1 du chapitre II à la correspondance de quasi-demande excédentaire ; tandis que dans le cas de préférences non transitives et totales, cette convexité ne peut être obtenue sans un renforcement des autres hypothèses sur les préférences. A.Mas-Colell (1974) l'a démontré en construisant un exemple de relation irréflexive et transitive, mais non négativement transitive (1), à valeurs convexes et de graphe ouvert, engendrant une correspondance de demande à valeurs non nécessairement convexes et qui n'admet pas de sous-correspondance semi-continue supérieurement et à valeurs convexes. Le contre-exemple de Mas-Colell invalide ainsi toute approche de l'équilibre intransitif en termes de demande excédentaire, comme d'ailleurs l'utilisation de tout théorème de point fixe dont l'application à l'existence de l'équilibre intransitif nécessiterait la convexité des valeurs de la correspondance de demande.

----

(1) et donc partie asymétrique d'un préordre qui n'est pas total. On peut, en effet, voir dans Fishburn (1970) que la partie asymétrique d'un préordre total est caractérisée par le fait qu'elle est négativement transitive (non x Py et non y Pz impliquent non x Pz), tandis que la partie asymétrique d'un préordre partiel est seulement transitive.

./.

Si on excepte l'article de A. Mas-Colell (1974) et un premier article de Shafer-Sonnenschein (1975,a), les démonstrations d'existence de l'équilibre intransitif reposent implicitement ou explicitement sur un résultat préalable d'existence d'un équilibre dans une économie abstraite. Aux deux exceptions près qui viennent d'être signalées, l'obtention des "nouveaux" théorèmes d'équilibre (c'est ainsi que Borglin et Keiding (1976) désignent les théorèmes d'existence de l'équilibre intransitif) est en effet caractérisée par le recours à une approche qui fut, comme on l'a signalé dans l'introduction du chapitre II, la première approche de l'équilibre : l'approche en termes d'économie abstraite, c'est-à-dire la description du fonctionnement compétitif de l'économie comme un jeu non-coopératif généralisé, faisant intervenir, à côté des agents économiques traditionnels, un agent supplémentaire dont le comportement formalise le rôle des prix dans une économie compétitive. On notera cependant que l'existence d'un équilibre pour ce jeu généralisé ne doit rien, lorsque les préférences ne sont pas transitives et totales, à la généralisation obtenue par Debreu en 1952 du théorème de Nash, puisque la démonstration du théorème d'équilibre de Debreu (1952) reposait sur la convexité des ensembles-images pour des correspondances qui ne sont autres que les correspondances de demande lorsque l'économie abstraite considérée est celle associée à une économie d'échange. L'existence d'un équilibre dans une économie abstraite intransitive nécessite l'emploi, selon le degré de force des hypothèses faites sur la continuité des préférences des agents, d'un théorème obtenu par sélection à partir du théorème de Kakutani ou d'un corollaire de ce théorème dont une démonstration directe et élémentaire peut être donnée à partir du théorème de Kakutani, sans appel au théorème de sélection.

C'est le premier de ces deux théorèmes que nous appliquerons dans le paragraphe II, afin d'asseoir l'équilibre intransitif sur les hypothèses les plus faibles possibles. Afin, par ailleurs, de relaxer, dans l'équilibre intransitif comme dans l'équilibre transitif, l'hypothèse forte de survivance des consommateurs, nous appliquerons ce théorème à la démonstration de l'existence d'un quasi-équilibre (plutôt que d'un équilibre) d'une économie abstraite, pour un concept de quasi-équilibre que nous définirons préalablement en vue de l'application du résultat à la démonstration de l'existence d'un quasi-équilibre dans une économie d'échange intransitive.

./.

Le cadre de cette démonstration, effectuée dans le paragraphe III, sera celui qui a été défini dans le chapitre II : une économie d'échange pur, comportant un nombre fini de biens et un nombre fini de consommateurs et pour laquelle des possibilités de disposition des excédents, décrites par un cône convexe fermé Y, de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif de R^ℓ, permettent de traiter simultanément l'équilibre avec libre disposition ($Y = -R^\ell_+$) et l'équilibre sans disposition ($Y = \{0\}$). L'existence d'un quasi-équilibre intransitif y sera démontrée sous des hypothèses plus faibles ou équivalentes à celles qui assurent au chapitre II l'existence d'un quasi-équilibre transitif (sans externalités).

Enfin, le passage, dans le paragraphe IV, de l'existence d'un quasi-équilibre intransitif à l'existence d'un équilibre intransitif reposera sur des conditions de continuité des préférences et d'irréductibilité de l'économie dont la définition généralisera à des préférences intransitives, et pouvant éventuellement dépendre des prix et des consommations des autres consommateurs, les définitions correspondantes données dans le chapitre II.

II. EQUILIBRE ET QUASI-EQUILIBRE DANS UNE ECONOMIE ABSTRAITE

Une *économie abstraite* dans R^ℓ, $\mathcal{E} = ((X^i, \alpha^i, P^i)_{i=1}^m)$ est définie par la donnée de m sous-ensembles X^i de R^ℓ, interprétés comme les *ensembles de choix* de chacun des m agents i = 1, ... m, de m *correspondances de contrainte* $\alpha^i : \prod_{j=1}^m X^j \to X^i$ et de m *correspondances de préférences* $P^i : \prod_{j=1}^m X^j \to X^i$.

Les correspondances de contrainte indiquent, pour chaque agent i et pour chaque élément x de l'ensemble produit $X = \prod_{j=1}^m X^j$, l'ensemble $\alpha^i(x)$ des choix possibles pour i dans X^i, compte tenu des choix $(x^j)_{j \neq i}$ des autres agents. Les correspondances de préférence indiquent pour chaque agent i et pour chaque élément x de l'ensemble produit $X = \prod_{j=1}^m X^j$ l'ensemble $P^i(x)$ des éléments de X^i préférés par i à x^i, compte tenu des choix $(x^j)_{j \neq i}$ des autres agents.

./.

Un *équilibre* de $\mathcal{E}$ est un point $\bar{x}$ de X vérifiant pour tout i=1,...,m:

(1) $\bar{x}^i \in \alpha^i(\bar{x})$

(2) $P^i(\bar{x}) \cap \alpha^i(\bar{x}) = \phi$

Les définitions qui viennent d'être données sont empruntées à Shafer-Sonnenschein (1975,b). Elles généralisent les définitions de Debreu (1952) et Arrow-Debreu (1954) données en termes de fonctions d'utilité des agents sur X. L'équilibre d'une économie abstraite se réduit à un équilibre de Nash si l'économie abstraite est un jeu non coopératif fini, c'est-à-dire dans le cas particulier où les sous-ensembles X^i sont les simplexes des stratégies mixtes de chacun des m joueurs, où les correspondances α^i vérifient : $\alpha^i(x) = X^i, \forall x \in X$ et où les préférences sont déduites de fonctions de paiement $p^i : X \to R$.

Nous allons maintenant donner du quasi-équilibre d'une économie abstraite une définition destinée à permettre de retrouver la notion de quasi-équilibre, définie au chapitre II, lorsque l'économie $\mathcal{E}$ sera l'économie abstraite associée à une économie d'échange pur comportant des activités de disposition.

Soient donc $\beta^i : \prod_{j=1}^{m} X^j \to X^i$ m correspondances vérifiant pour tout i = 1, ..., m et pour tout x de X les conditions :

(3) $\beta^i(x) \subset \alpha^i(x)$

(4) $\beta^i(x) \neq \phi \Rightarrow \overline{\beta^i(x)} = \overline{\alpha^i(x)}$

Posant $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^m)$, nous appellerons β - *quasi-équilibre* de $\mathcal{E}$ tout point $\bar{x}$ de X vérifiant pour tout i = 1, ..., m :

(1) $\bar{x}^i \in \alpha^i(\bar{x})$

(2) $P^i(\bar{x}) \cap \beta^i(\bar{x}) = \phi$

La démonstration de l'existence d'un quasi-équilibre de $\mathcal{E}$ reposera sur la partie b) du corollaire 1 de la proposition 12 du chapitre I, théorème de point fixe dont l'énoncé, dû à Bergstrom (1975), généralise un résultat de Gale et Mas-Colell (1975).

./.

Rappelons tout d'abord l'énoncé de ce théorème obtenu par sélection à partir du théorème de Kakutani et dont nous indiquons ici une variante qui suffira à la démonstration de la proposition 1 :

Théorème 1 (Bergstrom - Mas-Colell)

Si pour tout $i = 1, \ldots, m$, X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de R^ℓ et si φ^i est une correspondance *semi-continue inférieurement* sur $X = \prod_{i=1}^{m} X^j$, à valeurs dans X^i, vérifiant pour tout x de X : $x^i \notin \text{conv } \varphi^i(x)$ (où $\text{conv } \varphi^i(x)$ désigne l'enveloppe convexe de $\varphi^i(x)$), alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que l'on ait, pour tout $i = 1, \ldots, m$:

$$\varphi^i(\bar{x}) = \phi.$$

Ce théorème a pour corollaire immédiat un cas particulier d'un théorème démontré dans Shafer-Sonnenschein (1976), à partir du théorème de Kakutani, sans aucun appel au théorème de sélection de Michael :

Théorème 2 (Shafer - Sonnenschein)

Si pour tout $i = 1, \ldots, m$, X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de R^ℓ et si φ^i est une correspondance définie sur $X = \prod_{j=1}^{m} X^j$, à valeurs dans X^i, *dont le graphe est ouvert* dans $X \times X^i$ et qui vérifie pour tout x de X : $x^i \notin \text{conv } \varphi^i(x)$, alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que l'on ait, pour tout $i = 1, \ldots, m$:

$$\varphi^i(\bar{x}) = \phi.$$

On a indiqué, dans le chapitre I, la démonstration directe et élémentaire de ce théorème (corollaire 2 de la proposition 12 du chapitre I), à partir du théorème de Kakutani.

Le théorème 1, qui fait intervenir une hypothèse plus faible de continuité des correspondances φ^i, permet d'obtenir la proposition suivante :

./.

Proposition 1

Si pour tout $i = 1, \ldots, m$

a) X^i est un sous-ensemble non vide, convexe, compact de R^ℓ

b) α^i est une correspondance semi-continue supérieurement sur X et à valeurs non vides, convexes, fermées

c) β^i est à valeurs convexes

d) - ou le graphe de β^i est ouvert dans $X \times X^i$ et P^i est semi-continue inférieurement sur X

- ou β^i est semi-continue inférieurement sur X (on déduit alors des relations (4) que α^i est sci en tout point x de X pour lequel $\beta^i(x) \neq \phi$) et le graphe de P^i est ouvert dans $X \times X^i$

e) pour tout x de X, $x^i \notin \text{conv } (P^i\ (x))$

alors $\mathcal{E} = ((X^i,\ \alpha^i,\ P^i)\ i = 1, \ldots, m)$ admet un β-quasi-équilibre.

Démonstration

Considérons tout d'abord, pour tout $i = 1, \ldots, m$, $G^i = \{x \in X / x^i \notin \alpha^i(x)\}$. Puisque α^i est scs à valeurs non vides, convexes et fermées, on peut trouver un voisinage ouvert U_x de x dans X et un ouvert convexe V_x de X^i tels que, si p^i désigne la projection $\prod_{j=1}^{m} X^j \to X^i$:

$$p^i\ (U_x) \cap V_x = \phi$$

$$x' \in U_x \Rightarrow \alpha^i\ (x') \subset V_x.$$

La famille $(U_x)_{x \in G^i}$ constitue un recouvrement ouvert de l'ensemble ouvert G^i. Puisque G^i est un espace métrique (et donc paracompact (1)), soit $(W_j)_{j \in J}$ un recouvrement *fermé* (dans G^i) de G^i,

- localement fini : tout x de G^i admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des W_j

- plus fin que $(U_x)_{x \in G^i}$: il existe une application $\pi : J \to G^i$ telle que pour tout j de J, $W_j \subset U_{\pi(j)}$.

----

(1) Voir au début de la partie V du chapitre I un rappel de la définition et des propriétés de la paracompacité. Voir aussi Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre IV, paragraphe 4.

./.

La correspondance $\delta^i : G^i \to X^i$ définie par : $\delta^i(x) = \bigcap_{x\in W_j} V_{\pi(j)}$ vérifie les propriétés suivantes :

- *le graphe de δ^i est ouvert dans* $G^i \times X^i$. En effet, si (x,z^i) appartient au graphe de δ^i et puisque le recouvrement $(W_j)_{j\in J}$ est fermé et localement fini, il existe un voisinage W de x tel que, pour tout x' de ce voisinage, l'ensemble $\{j\in J \ / \ x'\in W_j\}$ soit fini et contenu dans $\{j\in J / x\in W_j\}$.
  On en déduit : $x'\in W \Rightarrow \delta^i(x) \subset \delta^i(x')$

  $$\text{et } x'\in W,\ z'^i\in\delta^i(x) \Rightarrow z'^i\in\delta^i(x').$$

  Puisque δ^i est, par construction, à valeurs ouvertes, ceci démontre l'ouverture du graphe de δ^i.
- *δ^i est à valeurs convexes et non vides.* En effet, chacun des $V_{\pi(j)}$ est convexe ; d'autre part, $x\in W_j \Rightarrow \alpha^i(x) \subset V_{\pi(j)}$, de sorte que, pour tout x de G^i, $\delta^i(x)$ contient $\alpha^i(x)$ et est ainsi (hypothèse b) non vide.
- $\forall x\in G^i$, $x^i\notin\delta^i(x)$ car $x\in W_j \Rightarrow x^i\notin V_{\pi(j)}$.

En vue de leur appliquer le théorème 1 rappelé plus haut, définissons maintenant pour tout i = 1, ..., m les correspondances $\varphi^i : X \to X^i$

$$\varphi^i(x) = \begin{cases} \delta^i(x) & \text{si } x^i\notin\alpha^i(x) \\ \beta^i(x) \cap P^i(x) & \text{si } x^i\in\alpha^i(x) \end{cases}$$

Si $x^i\notin\alpha^i(x)$, la semi-continuité inférieure en x de φ^i provient des propriétés de continuité de δ^i.

Si $x^i\in\alpha^i(x)$, plaçons-nous, par exemple, dans le cas où β^i a un graphe ouvert dans $X \times X^i$ et où P^i est sci sur X (dans l'autre cas, il suffit d'interchanger les rôles de P^i et de β^i). Soit V un ouvert de X^i vérifiant : $V \cap \beta^i(x) \cap P^i(x) \neq \phi$ et soit $z^i\in V \cap \beta^i(x) \cap P^i(x)$. Puisque le graphe de β^i est ouvert, soient $U\in\mathcal{V}(x)$ et $W\in\mathcal{V}(z^i)$ tels que : $x'\in U$ et $z'^i\in W \to z'^i\in\beta^i(x')$. De la semi-continuité inférieure de P^i, on déduit l'existence de $U'\in\mathcal{V}(x)$ tel que $x'\in U' \to V \cap W \cap P^i(x') \neq \phi$. Si $x\in U \cap U'$, on a alors : $V \cap \beta^i(x') \cap P^i(x') \neq \phi$, et, a fortiori, $V \cap \alpha^i(x') \neq \phi$, d'où l'on déduit (puisque $\alpha^i(x') \subset \delta^i(x')$) : $V \cap \varphi^i(x') \neq \phi$, ce qui démontre la semi-continuité inférieure en x de φ^i.

Il résulte enfin des propriétés de δ^i et des hypothèses c) et e) que les correspondances φ^i vérifient, pour tout x de X : $x^i\notin \text{conv } \varphi^i(x)$.
Soit alors, en application du théorème 1, $\bar{x}\in X$ tel que l'on ait pour tout i = 1, ..., m : $\varphi^i(\bar{x}) = \phi$. Puisque δ^i est à valeurs non vides, on en déduit :

$$\forall i = 1, \dots, m,\ \bar{x}^i\in\alpha^i(\bar{x}) \text{ et } \beta^i(\bar{x}) \cap P^i(\bar{x}) = \phi$$

C.Q.F.D.

./.

Remarques

1. Si pour tout $i = 1, \ldots, m$, $\psi^i : X \to R^+$ est une fonction semi-continue inférieurement [1] et si $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$, J. Greenberg (1977) s'inspirant de la définition donnée par Debreu (1962) pour le quasi-équilibre d'une économie, définit un *ψ-quasi-équilibre* d'une économie abstraite $\mathcal{E} = ((X^i, \alpha^i, P^i)_{i=1,\ldots,m})$ par les relations :

$$\forall i=1,\ldots,m \ , \ \bar{x}^i \in \alpha^i (\bar{x})$$

$$P^i(\bar{x}) \cap \alpha^i(\bar{x}) = \phi \quad \text{et/ou} \quad \psi^i(\bar{x}) = 0$$

Les notions de *β-quasi-équilibre* et de *ψ-quasi-équilibre* sont évidemment reliées.

Si les correspondances β^i sont sci, il existe des fonctions $\psi^i : X \to R_+$ semi-continues inférieurement et vérifiant $\psi^i(x) > 0 \Longleftrightarrow \beta^i(x) \neq \phi$ (par exemple les fonctions $\psi^i(x) = 1$ si $\beta^i(x) \neq \phi$; $\psi^i(x) = 0$ si $\beta^i(x) = \phi$). Un ψ-quasi-équilibre est alors un β-quasi-équilibre.

On peut inversement, à partir des ψ^i, définir pour tout $i = 1, \ldots, m$ des correspondances β^i :

$$\beta^i(x) = \begin{cases} \phi & \text{si } \psi^i(x) = 0 \\ \alpha^i(x) & \text{si } \psi^i(x) > 0 \end{cases}$$

et un β-quasi-équilibre est un ψ-quasi-équilibre. Si les correspondances α^i sont sci en tout point x de X pour lequel $\psi^i(x) > 0$, les correspondances β^i sont sci. La proposition 1 avec une hypothèse d) de semi-continuité inférieure pour les correspondances β^i et d'ouverture du graphe pour les correspondances de préférence est ainsi équivalente au théorème d'existence de J. Greenberg (1977).

L'intérêt de la notion de β-quasi-équilibre et du théorème d'existence qui a été démontré ici est de permettre *aussi* l'existence du quasi-équilibre sous des hypothèses plus faibles de continuité des préférences, au prix d'un renforcement des hypothèses de continuité des correspondances β^i qui correspond précisément, on le verra, aux propriétés de ces correspondances dans l'économie abstraite qui sera associée à une économie d'échange.

----

(1) J. Greenberg suppose les fonctions ψ^i continues mais la démonstration de son théorème n'utilise que la semi-continuité inférieure des ψ^i.

./.

2. Si P^i est à valeurs ouvertes dans X^i (ce qui est en particulier le cas si P^i a un graphe ouvert dans $X \times X^i$), les relations $P^i(x) \cap \alpha^i(x) \neq \phi$ et $\beta^i(x) \neq \phi$ impliquent $P^i(x) \cap \overline{\beta^i(x)} \neq \phi$, puis $P^i(x) \cap \beta^i(x) \neq \phi$.

Si β^i est à valeurs convexes et ouvertes dans X^i (en particulier, si β^i a un graphe ouvert dans $X \times X^i$) et si P^i vérifie l'hypothèse :

(1) $\forall x \in X$, $y^i \in P^i(x)$ et $z^i \in X^i$ $\Rightarrow$

$$\exists\, \lambda,\ 0 < \lambda \leq 1 \text{ et } \lambda z^i + (1-\lambda)\, y^i \in P^i(x)$$

les relations $P^i(x) \cap \alpha^i(x) \neq \phi$ et $\beta^i(x) \neq \phi$ impliquent également $P^i(x) \cap \overline{\beta^i(x)} \neq \phi$ puis $P^i(x) \cap \beta^i(x) \neq \phi$.

Sous réserve donc de l'adjonction de la propriété de continuité (1) pour les correspondances de préférences semi-continues inférieurement sur X, la recherche des conditions de passage de l'existence d'un β-quasi-équilibre à l'existence d'un équilibre se ramène ainsi à la recherche de conditions assurant la non-vacuité de tous les $\beta^i(\bar{x})$ en tout β-quasi-équilibre $\bar{x}$ de $\mathcal{E}$ obtenu par application de la proposition 1.

3. Il suffit de poser pour tout x de X, $\alpha^i(x) = \beta^i(x) = X^i$ et $P^i = \varphi^i$ pour voir que le théorème 1 est un cas particulier de la proposition 1. Il en est de même évidemment du théorème 2 et on a vu, dans la partie V du chapitre I, que ce dernier impliquait le théorème de Kakutani. On notera donc, comme Uzawa l'avait fait pour le lemme de Gale-Nikaido-Debreu et comme nous l'avons indiqué dans le chapitre II pour le lemme utilisé pour établir l'existence de l'équilibre transitif, que le théorème d'existence d'un β-quasi-équilibre pour une économie abstraite intransitive implique le théorème de Kakutani qui reste ainsi le théorème sur lequel repose obligatoirement toute démonstration de l'existence de l'équilibre, tant transitif qu'intransitif, pour une économie comportant un nombre fini de biens et un nombre fini d'agents.

./.

III. EXISTENCE D'UN QUASI-EQUILIBRE DANS UNE ECONOMIE D'ECHANGE

Considérons maintenant une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\ldots,m}\ Y)$, caractérisée par la donnée de m *ensembles de consommation* $X^i \subset R^\ell$, de m *correspondances de préférence* $P^i : S \times \prod_{j=1}^{m} X^j \to X^i$, de m vecteurs $\omega^i \in R^\ell$ représentant les *ressources initiales* de chacun des consommateurs, et d'un cône convexe fermé Y, de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif de R^ℓ, représentant, comme dans le chapitre II, les *possibilités de disposition* des biens en excédent.

Comme dans le chapitre II, S désigne la sphère-unité de R^ℓ

$$S = \{ p \in R^\ell \ / \ \|p\| = 1 \}$$

et les prix du marché, dont les coordonnées peuvent être positives, négatives ou nulles mais qui n'interviennent dans les définitions et résultats de la théorie de l'équilibre que définis à une constante positive multiplicative près, sont tous supposés de norme égale à 1.

La représentation des préférences de chacun des consommateurs par les correspondances P^i, pour lesquelles on ne fait aucune hypothèse de totalité ou de transitivité dans la comparaison deux à deux des éléments de X^i, permet d'introduire la possibilité pour les préférences de chaque consommateur de dépendre des prix et des consommations des autres consommateurs. L'introduction de ces externalités est un des avantages de l'équilibre non transitif.

Ainsi $P^i(p,x)$ désigne *l'ensemble des éléments de X^i strictement préférés à x^i, compte tenu de p et de $(x^j)_{j\neq i}$.*

Comme au chapitre II, on définit pour tout $p \in S$ et pour tout $i = 1, \ldots, m$:

$$\gamma^i(p) = \{x^i \in X^i \ / \ p.x^i \leq p.\omega^i\}$$

correspondance budgétaire du $i^{\text{ième}}$ consommateur

$$\delta^i(p) = \{x^i \in X^i \ / \ p.x^i < p.\omega^i\}$$

./.

Une *allocation* $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est dite *réalisable* s'il existe $y \in Y$ tel que $\sum_{i=1}^{m} x^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + y$, c'est-à-dire si $\sum_{i=1}^{m} x^i \in \{\sum_{i=1}^{m} \omega^i\} + Y$.

Un *quasi-équilibre* de E est un point $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \in S \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$ vérifiant les conditions :

(1) $\forall i = 1, \ldots, m$, $\bar{x}^i \in \gamma^i(\bar{p})$ et $\delta^i(\bar{p}) \cap P^i(\bar{p}, \bar{x}) = \phi$

(2) $\bar{p} \in Y^\circ = \{p \in R^\ell / p.y \leq 0, \forall y \in Y\}$ et $\bar{p}.\bar{y} = 0$

(3) $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \bar{y}$

Bien entendu, cette définition se réduit à celle donnée au chapitre II si pour tout $i = 1, \ldots, m$, P^i est la correspondance de préférence stricte associée à un préordre total sur X^i, indépendant des prix et des consommations des autres consommateurs.

A l'économie d'échange E, on associe une économie abstraite $\mathcal{E} = ((X^i, Q^i, \alpha^i)_{i=0,1,\ldots,m})$ de la façon suivante.

Si B est la boule-unité de R^ℓ, $B = \{p \in R^\ell / \|p\| \leq 1\}$, on introduit tout d'abord un agent supplémentaire (i=0) possédant

- pour ensemble de choix : $X^\circ = B \cap Y^\circ$
- pour correspondance de préférence Q° définie sur $(B \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ valeurs dans $B \cap Y^\circ$:

$$Q^\circ(p,x) = \{q \in B \cap Y^\circ / q.(\Sigma x^i - \Sigma\omega^i) > p.(\Sigma x^i - \Sigma\omega^i)\}$$

- pour correspondance de contrainte α° : $(B \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \to (B \cap Y^\circ)$

$$\alpha^\circ(p,x) = B \cap Y^\circ$$

Autrement dit, *en agissant sur les prix dans le domaine* $B \cap Y^\circ$, *et pour une allocation donnée* $x \in \prod_{i=1}^{m} X^i$, *l'agent supplémentaire cherche* à maximiser la valeur de l'excédent de la somme des consommations par rapport à la somme des ressources initiales, ou encore *à minimiser le coût de la disposition nécessaire pour annuler un excédent du montant total des ressources initiales par rapport à la consommation totale.*

./.

Les ensembles de choix des autres agents (i = 1, ..., m) sont naturellement les ensembles de consommation X^i ; leurs correspondances de contrainte et de préférences sont d'autre part définies, pour des prix appartenant à $(B \cap Y^\circ)$ par :

$$\forall i = 1,\dots,m,\ \alpha^i(p,x) = \{z^i \in X^i \ / \ p.z^i \leq p.\omega^i + \frac{1-\|p\|}{m}\}$$

$$\text{et } Q^{\prime i}(p,x) = \widehat{P}^i \left(\frac{p}{\|p\|},x\right) \quad \text{si } p \neq 0$$

$$Q^{\prime i}(0,x) = \bigcap_{P \in S \cap Y^\circ} \widehat{P}^i(p,x)$$

où, comme au chapitre II, les correspondances $\widehat{P}^i$ sont définies sur $S \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ à partir des correspondances P^i par les relations :

$$\widehat{P}^i(p,x) = \{z^i \in X^i / z^i = x^i + \lambda(y^i - x^i),\ 0<\lambda\leq 1,\ y^i \in P^i(p,x)\}$$

L'application de la proposition 1 à l'économie abstraite $\mathcal{E}$ associée à une économie d'échange E permet d'établir le théorème d'existence suivant :

Proposition 2

Si une économie d'échange $E = ((X^i,P^i,\omega^i)_{i=1,\dots,m},Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $(-R^\ell_+)$, vérifie les hypothèses :

a) $\forall i=1,\dots,m$, X^i est un sous-ensemble convexe, compact de R^ℓ

b) $\forall i=1,\dots,m$, P^i est une correspondance semi-continue inférieurement de $(S \cap Y^\circ) \times \prod_{j=1}^{m} X^j$ dans X^i

c) $\forall i=1,\dots,m$ et $\forall (p,x) \in (S \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$, $x^i \notin \text{conv } P^i(p,x)$

d) $\forall i=1,\dots,m$, $\omega^i \in X^i - Y$

e) Si $x=(x^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est une allocation réalisable, on a pour tout $i=1,\dots,m$, $\bigcap_{p \in S \cap Y^\circ} \widehat{P}^i(p,x) \neq \phi$

alors il existe $(\overline{p},\overline{x},\overline{y}) \in (S \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point de quasi-équilibre de E.

./.

Démonstration

Soit $\mathcal{E} = ((X^i, Q^i, \alpha^i)_{i=0,1,\ldots,m})$ l'économie abstraite associée à E et soient β^i, $i=0,1,\ldots,m$, des correspondances $\prod_{i=0}^{m} X^i \to X^i$ définies par :

$$\beta^\circ(p,x) = \alpha^\circ(p,x) = X^\circ = B \cap Y^\circ$$

et, pour $i=1,\ldots,m$, $\beta^i(p,x) = \{z^i \in X^i / p.z^i < p.\omega^i + \frac{1-\|p\|}{m}\}$

Les correspondances β^i vérifient manifestement par rapport aux correspondances α^i les relations (3) et (4) du paragraphe I.

On démontrera donc dans un premier temps que l'économie abstraite $\mathcal{E}$ vérifie les conditions de la proposition 1 et admet ainsi un β-quasi-équilibre $(\bar{p},\bar{x})$, puis dans un deuxième temps que $(\bar{p},\bar{x},\Sigma\bar{x}-\Sigma\omega^i)$ est un quasi-équilibre de l'économie d'échange E.

1) Il résulte, en effet, des hypothèses a) et d) et des définitions des correspondances α^i et β^i que les hypothèses a), b), c) de la proposition 1 sont vérifiées. Il résulte également de la définition de β^i que si $p \neq 0$, tout point $(p,x,z^i) \in X^\circ \times \prod_{j=1}^{m} X^j \times X^i$ tel que $z^i \in \beta^i(p,x)$ est intérieur au graphe de β^i (pour la topologie de $X^\circ \times \prod_{j=1}^{m} X^j \times X^i$).

Si d'autre part $z^i \in \beta^i(0,x)$, si $z'^i \in X^i \cap B_o(z^i,\varepsilon)$ et si $0 < \|p\| < \frac{1}{1+m(\|z^i\|+\varepsilon+\|\omega^i\|)}$

on a : $p.z'^i < \|p\|\|z'^i\| < \|p\|(\|z^i\|+\varepsilon) < \frac{1}{m}(1-\|p\|) - \|p\|\|\omega^i\| \leq p.\omega^i + \frac{1-\|p\|}{m}$

ce qui montre que $(0,x,z^i) \in X^\circ \times \prod_{j=1}^{m} X^j \times X^i$ est intérieur au graphe de β^i (pour la topologie de $X^\circ \times \prod_{j=1}^{m} X^j \times X^i$), correspondance qui a ainsi un graphe ouvert dans $X^\circ \times \prod_{j=1}^{m} X^j \times X^i$.

Par définition de Q°, on a, pour tout p de X°, $p \notin Q^\circ(p,x) = \text{conv}\, Q^\circ(p,x)$ et un calcul simple montre que, si les correspondances P^i vérifient l'hypothèse c), on a pour tout (p,x) de $(S \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$, $x^i \notin \text{conv}\hat{P}^i(p,x)$, et donc, pour tout (p,x) de $(B \cap Y^\circ) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$, $x^i \notin \text{conv}Q^i(p,x)$; ce qui montre que l'hypothèse e) de la proposition 1 est vérifiée.

./.

Enfin la correspondance Q^o, ayant par définition un graphe ouvert dans $[(B \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i] \times (B \cap Y^o)$, est a fortiori semi-continue inférieurement sur $(B \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$. Il reste à vérifier que les *correspondances* Q^i, $i = 1,\dots, m$, *sont semi-continues inférieurement sur* $(B \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$.

Soit, en effet, $(p, x) \in (B \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ et V un ouvert de X^i tel que $V \cap Q^i(p,x) \neq \phi$.

- Si $p \neq 0$, il existe $z^i \in V \cap \hat{P}^i(\frac{p}{\|p\|}, x)$, c'est-à-dire $z^i = x^i + \lambda(y^i - x^i)$ avec $0 < \lambda \leq 1$ et $y^i \in P^i(\frac{p}{\|p\|}, x)$, et $\varepsilon > 0$ tels que l'intersection avec X^i de la boule ouverte de centre z^i et de rayon ε soit contenue dans V : $X^i \cap B_o(z^i, \varepsilon) \subset V$.

Puisque P^i est s.c.i. sur $(S \cap Y)$, il existe des voisinages de $\frac{p}{\|p\|}$ (dans $B \cap Y^o$) et de x (dans $\prod_{i=1}^{m} X^i$), $W \in \mathcal{V}(\frac{p}{\|p\|})$ et $Z \in \mathcal{V}(x)$, tels que :

$$q' \in W \cap S \cap Y^o \text{ et } x' \in Z \Rightarrow B_o(y^i, \varepsilon) \cap P^i(q', x') \neq \phi$$

Soit, d'autre part, $U \in \mathcal{V}(p)$ tel que $p' \in U \Rightarrow p' \neq 0$ et $\frac{p'}{\|p'\|} \in W$

$p' \in U$ et $x' \in Z \cap (X^1 \times \dots X^{i-1} \times B_o(x^i, \varepsilon) \times X^{i+1} \times \dots \times X^m) \Rightarrow$ il existe $y'^i \in (P^i(\frac{p'}{\|p'\|}, x') \cap B_o(y^i, \varepsilon))$ et si $z'^i = x'^i + \lambda(y'^i - x'^i)$, puisque $\|z'^i - z^i\| \leq (1-\lambda)\| x'^i - x^i\| + \lambda\|y'^i - y^i\| < \varepsilon$, $z'^i \in \hat{P}^i(\frac{p'}{\|p'\|}, x') \cap V = Q^i(p, x) \cap V$, ce qui démontre la semi-continuité inférieure en (p, x) de Q^i.

- Si $p = 0$, $V \cap (\bigcap_{p \in S \cap Y^o} \hat{P}^i(p, x)) \neq \phi$. On vient de démontrer que la semi-continuité inférieure sur $(S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ des correspondances P^i entraîne la semi-continuité inférieure sur $(S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$

./.

des correspondances $\hat{P}^i$ (1). On a ainsi :

$\forall$ $p \in S \cap Y^o$, il existe W_p, voisinage de p dans $S \cap Y^o$, et U_p, voisinage de x dans $\prod_{i=1}^{m} X^i$, tels que $q' \in W$ et $x' \in U_p \Rightarrow V \cap \hat{P}^i(q', x') \neq \phi$.

Soit, puisque $(S \cap Y^o)$ est compact, $W_{p_1}, \ldots, W_{p_n}$ un recouvrement fini de $S \cap Y^o$.

$$q' \in W_{p_1} \cup \ldots \cup W_{p_n} \text{ et } x' \in U_{p_1} \cap \ldots \cap U_{p_n} \Rightarrow V \cap \hat{P}^i(q', x') \neq \phi$$

ou encore : $p' \in (B \cap Y^o), p' \neq 0$ et $x' \in U_{p_1} \cap \ldots \cap U_{p_n} \Rightarrow$
$V \cap \hat{P}^i(\frac{p'}{\|p'\|}, x') = V \cap Q^i(p', x') \neq \phi$, ce qui démontre la semi-continuité inférieure en $(0, x)$ de Q^i.

2) Soit alors, en application de la proposition 1, $(\bar{p}, \bar{x}) \in (B \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ un β-quasi-équilibre de $\mathcal{E}$. On a simultanément :

$$\bar{p} \in B \cap Y^o \text{ et } \forall p \in B \cap Y^o, \; p.(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) \leq \bar{p}.(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) \qquad (1)$$

$$\forall i = 1, \ldots, m, \; \bar{p}.\bar{x}^i \leq \bar{p}.\omega^i + \frac{1 - \|\bar{p}\|}{m} \qquad (2)$$

$$\forall i = 1, \ldots, m, \; \beta^i(\bar{p}, \bar{x}) \cap Q^i(\bar{p}, \bar{x}) = \phi \qquad (3)$$

Deux cas sont alors à distinguer dont seul le second est compatible avec les relations (1), (2) et (3) :

- si $\bar{p}.(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) > 0$, on déduit de (1) que $\|\bar{p}\| = 1$ puis, par sommation sur i dans les relations (2), que $\bar{p}.(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) \leq 0$; on aboutit ainsi à une contradiction;

- si $\bar{p}.(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) \leq 0$, on déduit de (1) que $(\Sigma \bar{x}^i - \Sigma \omega^i) \in Y$ et donc que l'allocation $\bar{x}$ est réalisable. Puisque $\beta^i(0, \bar{x}) = X^i$ et $Q^i(0, \bar{x}) = \bigcap_{p \in S \cap Y^o} \hat{P}^i(p, \bar{x})$, $\bar{p} \neq 0$, en vertu de l'hypothèse e) et les relations (3) s'écrivent :

$$\forall i = 1, \ldots, m, \; \beta^i(\bar{p}, \bar{x}) \cap \hat{P}^i(\frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|}, \bar{x}) = \phi \qquad (4)$$

---

(1) Ceci est établi dans Bergstrom (1975) à qui nous avons emprunté le détail de la démonstration.

Une deuxième application de l'hypothèse e) $(P^i(\frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|}, \bar{x}) \neq \phi$, $\forall\ i = 1,\dots, m)$ montre que $\bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i + \frac{1-\|\bar{p}\|}{m}$ $\forall\ i = 1,\dots, m$ et par sommation sur i, que $\bar{p}.(\Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i) = 1 - \|\bar{p}\|$ d'où l'on déduit :

$$\bar{p}.(\Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i) = 0 \quad \text{et} \quad \|\bar{p}\| = 1.$$

$(\bar{p}, \bar{x}, \Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$ est ainsi un quasi-équilibre de l'économie E qui vérifie :

$$\forall\ i = 1,\dots, m, \quad \bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i \quad \text{et} \quad \delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{p}, \bar{x}) = \phi .$$

C.Q.F.D.

Bien entendu, on passe de l'existence d'un quasi-équilibre dans le cas où les ensembles de consommation sont supposés compacts (proposition 2) à l'existence d'un quasi-équilibre dans le cas où les ensembles de consommation sont seulement bornés inférieurement (proposition 3) en adaptant les procédures de démonstration qui ont été utilisées dans le chapitre II pour passer de la proposition 1 à la proposition 2.

Proposition 3.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $(-R^\ell_+)$, vérifie les hypothèses b), c), d), e) de la proposition 2 et l'hypothèse :

a) $\forall\ i = 1,\dots, m$, X^i est un sous-ensemble convexe, fermé de R^ℓ, borné inférieurement pour l'ordre partiel sur R^ℓ, produit des ordres naturels sur R

alors il existe $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point de quasi-équilibre de E.

Démonstration.

Désignons, en effet, par $\tilde{X}^i$ l'ensemble réalisable du $i^{\text{ième}}$ consommateur

$$\tilde{X}^i = \{x^i \in X^i \ / \ x^i + \sum_{j\neq i} x^j = \sum_{j=1}^{m} \omega^j + y,\ x^j \in X^j\ \forall\ j \neq i \text{ et } y \in Y\}$$

./.

Il résulte des différents éléments de l'hypothèse a) et de la définition de Y que chaque $\tilde{X}^i$ est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de R^ℓ. Soit alors r un nombre réel positif tel que la boule ouverte $B_o(0, r)$ contienne chacun des $\tilde{X}^i$.

Pour tout $i = 1, \dots, m$, posons $X^{ir} = X^i \cap B_f(0, r)$ où $B_f(0, r)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon r; désignons d'autre part par $\widehat{P}^{ir}$ les correspondances de $((S \cap Y^o) \times \prod_{j=1}^{m} X^{jr})$ dans X^{ir} :

$$\widehat{P}^{ir}(p, x) = \widehat{P}^i(p, x) \cap B_f(0, r)$$

et considérons l'économie $E^r = ((X^{ir}, \widehat{P}^{ir}, \omega^i)_{i=1,\dots, m}, Y)$.

- X^{ir} est par définition un sous-ensemble convexe compact de R^ℓ.

- Si O^i est un ouvert (dans X^i) vérifiant $O^i \cap B_f(0, r) \cap \widehat{P}^i(p, x) \neq \phi$, on déduit de la définition de $\widehat{P}^i(p, x)$ que : $O^i \cap B_o(0, r) \cap \widehat{P}^i(p, x) \neq \phi$. Il suffit alors d'utiliser la semi-continuité inférieure des correspondances $\widehat{P}^i$ pour trouver W, voisinage de p dans $(S \cap Y^o)$ et pour tout $j = 1, \dots, m$, U^j, voisinage de x^j dans X^j, tels que :

$$p' \in W \text{ et } x' \in \prod_{j=1}^{m} U^j \Rightarrow O^i \cap B_o(0, r) \cap \widehat{P}^i(p', x') \neq \phi$$

c'est-à-dire : $p' \in W$ et $x' \in \prod_{j=1}^{m} (U^j \cap B_f(0, r)) \Rightarrow O^i \cap \widehat{P}^{ir}(p', x') \neq \phi$.

Ceci montre la semi-continuité inférieure sur $(S \cap Y^o) \times \prod_{j=1}^{m} X^{jr}$ des correspondances $\widehat{P}^{ir}$.

- Le fait que les hypothèses c) et d) de la proposition 2 sont vérifiées pour l'économie E^r découle immédiatement du fait qu'elles le sont pour l'économie E et des définitions de X^{ir} et de $\widehat{P}^{ir}$.

- Soit enfin, si $x = (x^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est une allocation réalisable, $z^i \in \bigcap_{p \in S \cap Y^o} P^i(p, x)$. $x^i \in \tilde{X}^i$ et il existe un ouvert U^i contenant x^i et contenu dans X^{ir}; il existe alors dans U^i des points distincts de x^i et appartenant au segment joignant x^i à z^i, c'est-à-dire des point de $\bigcap_{p \in S \cap Y^o} \widehat{P}^{ir}(p, x)$.

Soit, en vertu de la proposition 2, $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^{ir} \times Y$ un point de quasi-équilibre de l'économie E^r. On a :

./.

(1) $\forall$ i = 1,..., m, $\bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i$ et $\delta^i(\bar{p}) \cap \widehat{P^{ir}}(\bar{p},\bar{x}) = \phi$

(2) $\bar{p} \in Y^o$ et $\bar{p}.\bar{y} = 0$

(3) $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i + \bar{y}$

La relation (3) montre que chacun des $\bar{x}^i$ appartient à $\tilde{X}^i \subset B_o(0, r) \cap X^i$. S'il existait $z^i \in \delta^i(\bar{p}) \cap P^i(\bar{p}, \bar{x})$, il existerait sur le segment joignant $\bar{x}^i$ à z^i des points de $\delta^i(\bar{p}) \cap \widehat{P^{ir}}(\bar{p}, \bar{x})$, contrairement au fait que $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ est un quasi-équilibre de E^r. $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ est ainsi un quasi-équilibre de E vérifiant :

$$\forall\ i = 1,\dots, m, \quad \bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i \quad \text{et} \quad \delta^i(\bar{p}) \cap \widehat{P^i}(\bar{p}, \bar{x}) = \phi$$

C.Q.F.D.

Il reste à commenter les hypothèses b), c), d) et e) des propositions 2 et 3 pour les comparer aux hypothèses correspondantes des propositions 1 et 2 du chapitre II.

L'hypothèse b) est une *hypothèse de continuité* des préférences plus faible que l'hypothèse correspondante faite pour assurer l'existence d'un quasi-équilibre transitif.

L'hypothèse c) est une *hypothèse de convexité*, plus faible que l'hypothèse de convexité pour tout (p, x) de $(S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i$ des ensembles $P^i(p, x)$ (à laquelle elle est équivalente lorsque les correspondances P^i sont les correspondances de préférence stricte associées à des préordres totaux sur les ensembles X^i), jointe à une sorte *d'irréflexité* des correspondances de préférence

$(\forall\ x \in X,\ \ \forall\ p \in S \cap Y^o,\ \ x^i \notin P^i(p, x))$.

L'hypothèse d) est la même *hypothèse faible de survivance des consommateurs* que celle qui a été faite pour l'existence d'un quasi-équilibre transitif : au prix éventuel d'une disposition, chacun des consommateurs peut "survivre" en consommant ses ressources initiales.

Enfin l'hypothèse e) est une *version renforcée de l'hypothèse* correspondante (dans l'équilibre transitif) *de non-saturation des préférences en toute composante d'une allocation réalisable.* Si les préférences des consommateurs sont indépendantes des prix et des consommations des autres consommateurs, elle se réduit à l'hypothèse de non-saturation

./.

faite dans les propositions 1 et 2 du chapitre II.

Au total, les propositions 2 et 3 de ce chapitre impliquent les propositions 1 et 2 du chapitre II, ce qui fait de l'existence d'un quasi-équilibre transitif un cas particulier de l'existence d'un quasi-équilibre intransitif.

Si les préférences dépendent des prix, on peut désirer affaiblir l'hypothèse e) de non-saturation des préférences. On va voir dans les propositions 4 et 5 ci-après, qu'on peut le faire si le cône convexe fermé Y décrivant les possibilités de disposition n'est pas réduit à $\{0\}$, la procédure de "normalisation" des prix [1] qui va être utilisée excluant le cas de l'absence totale de disposition.

<u>Proposition 4.</u>

Si $Y \neq \{0\}$, la proposition 2 reste valable si l'hypothèse e) est remplacée par :

e) Si $x = (x^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est une allocation réalisable, on a pour tout $i = 1,\ldots, m$ et pour tout $p \in S \cap Y^o$: $P^i(p, x) \neq \phi$.

<u>Démonstration.</u>

- Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où Y admet un point intérieur y. L'ensemble $\Delta = \{p \in Y^o \;/\; p.y = -1\}$ est alors non vide, convexe, compact, homéomorphe à $S \cap Y^o$.

Δ est, en effet, convexe et fermé par construction. Pour voir qu'il est non vide et borné, il suffit de remarquer que, si Y contient la boule fermée $B_f(y, \varepsilon)$, on a pour tout p de Y^o :

$$p.(y + \frac{p}{\|p\|}\varepsilon) \leq 0$$

ce qui implique, pour tout p de Y^o:

$$p.y \leq -\|p\|\varepsilon < 0.$$

---

(1) Procédure empruntée à G. Debreu (1956).

./.

On en déduit : $\forall\, p \in S \cap Y^o,\ \ p' = \frac{p}{-p.y} \in \Delta$

et $\forall\, p' \in \Delta,\ \| p' \| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

L'application $p \rightarrow \frac{p}{-p.y}$ (d'inverse : $p' \rightarrow \frac{p'}{\| p' \|}$ représente l'homéomorphisme recherché de $S \cap Y^o$ sur Δ .

A l'économie $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\ldots,m}, Y)$ associons alors l'économie abstraite $\mathcal{E} = ((X^i, \alpha^i, Q^i)_{i=0,\ldots,m})$ définie par :

$X^o = \Delta$ et, pour tout (p', x) de $\Delta \times \prod_{i=1}^{m} X^i$:

$\alpha^o(p', x) = \Delta$

$Q^o(p', x) = \{q \in \Delta \ / \ q.(\Sigma x^i - \Sigma\omega^i) > p'.(\Sigma x^i - \Sigma\omega^i)\}$

et, pour tout $i=1,\ldots, m$:

$\alpha^i(p', x) = \{x^i \in X^i \ / \ p'.x^i \leq p'.\omega^i\} = \gamma^i(\frac{p'}{\|p'\|})$

$Q^i(p', x) = \widehat{P^i}(\frac{p'}{\|p'\|}, x)$

En vue de définir pour $\mathcal{E}$ un β-quasi-équilibre, on pose :

$\beta^o(p', x) = \alpha^o(p', x) = \Delta$

$\beta^i(p', x) = \{x^i \in X^i \ / \ p'.x^i < p'.\omega^i\} = \delta^i(\frac{p'}{\|p'\|})$

On peut voir, comme dans la démonstration de la proposition 3, que l'économie abstraite $\mathcal{E}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1 et admet donc un β-quasi-équilibre $(\bar{p}', \bar{x})$ vérifiant :

$\bar{p}' \in \Delta$ et $\forall\, q \in \Delta$, $q.(\Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i) \leq \bar{p}'.(\Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i)$

$\forall\, i = 1,\ldots,m$, $\bar{p}'.\bar{x}^i \leq \bar{p}'.\omega^i$ et $\delta^i(\frac{\bar{p}'}{\|\bar{p}'\|}) \cap \widehat{P^i}(\frac{\bar{p}'}{\|\bar{p}'\|}, x) = \phi$.

On en déduit : $\Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i \in Y$

puis, en utilisant e) : $\bar{p}'.\bar{x}^i = \bar{p}'.\omega^i \quad \forall\, i = 1,\ldots,m.$

Si on pose $\bar{p} = \frac{\bar{p}'}{\|\bar{p}'\|}$, $(\bar{p}, \bar{x}, \Sigma\bar{x}^i - \Sigma\omega^i)$ est ainsi un quasi-équilibre de E .

./.

- Dans le cas général, Y peut être considéré comme l'intersection d'une famille décroissante (Y^n) de cônes convexes, fermés, de sommet 0, contenant Y, contenus dans l'orthant négatif $(-R_+^\ell)$ et admettant tous un point intérieur. On vient de démontrer que chacune des économies $E^n = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ admet un point de quasi-équilibre

$$(\bar{p}^n, \bar{x}^n, \sum_{i=1}^m \bar{x}^{in} - \sum_{i=1}^m \omega^i) \in (S \cap (Y^n)^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y^n \subset (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y^n$$

Chacun des ensembles $(S \cap Y^o)$ et X^i, $i = 1,\dots,m$ étant compact, soit $(\bar{p}, \bar{x})$ la limite d'une suite partielle convergente $(\bar{p}^{n_k}, \bar{x}^{n_k})$ extraite de la suite $(\bar{p}^n, \bar{x}^n)_{n\in N}$.

Par passage à la limite dans les relations valables pour tout n de N :

$$\forall\, i = 1,\dots,m\ ,\ \bar{p}^n.\bar{x}^{in} = \bar{p}^n.\,\omega^i \text{ et } \delta^i(\bar{p}^n) \cap \hat{P}^i(\bar{p}^n, \bar{x}^n) = \phi$$

$$\bar{p}^n \in Y^o \text{ et } \sum_{i=1}^m \bar{x}^{in} - \sum_{i=1}^m \omega^i \in Y$$

on obtient :

$$\forall\, i = 1,\dots, m\ ,\ \bar{p}.\bar{x}^i = \bar{p}.\omega^i$$

$$\bar{p} \in Y^o \text{ et } \sum_{i=1}^m \bar{x}^i - \sum_{i=1}^m \omega^i \in Y.$$

Enfin, si $y^i \in \delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{p},\bar{x})$, on déduit de l'ouverture du graphe de la correspondance δ^i et de la semi-continuité inférieure de la correspondance $\hat{P}^i$:

$$\exists\, U' \in \mathcal{V}(\bar{p}), V \in \mathcal{V}(y^i)\ ,\ p' \in U' \text{ et } y'^i \in V \Rightarrow y'^i \in \delta^i(p')$$

$$\exists\, U'' \in \mathcal{V}(\bar{p}) \text{ et } W \in \mathcal{V}(\bar{x})\ ,\ p' \in U'' \text{ et } x' \in W \Rightarrow V \cap \hat{P}^i(p', x') \neq \phi$$

et donc : $p \in U' \cap U''$ $x' \in W \Rightarrow \delta^i(p') \cap \hat{P}^i(p', x') \neq \phi$

Soit alors K tel que $k > K \Rightarrow \bar{p}^{n_k} \in U' \cap U''$ et $\bar{x}^{n_k} \in W$; on en déduit : $\delta^i(\bar{p}^{n_k}) \cap \hat{P}^i(\bar{p}^{n_k}, \bar{x}^{n_k}) \neq \phi$, contrairement à la relation écrite, plus haut, pour tout n : $\delta^i(\bar{p}^n) \cap \hat{P}^i(\bar{p}^n, \bar{x}^n) = \phi$.

On a finalement : $\delta^i(\bar{p}) \cap \hat{P}^i(\bar{p}, \bar{x}) = \phi$ $\forall\, i = 1,\dots, m$ et

$(\bar{p}, \bar{x}, \sum_{i=1}^m \bar{x}^i - \sum_{i=1}^m \omega^i) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y$ est un quasi-équilibre de E.

C.Q.F.D.

./.

Proposition 5.

Si $Y \neq \{0\}$, la proposition 3 reste valable si l'hypothèse e) est remplacée par :

e) Si $x = (x^i) \in \prod_{i=1}^{m} X^i$ est une allocation réalisable, on a pour tout $i = 1, \ldots, m$, et pour tout $p \in S \cap Y^o$: $P^i(p, x) \neq \phi$.

Démonstration.

On peut reprendre, sans rien y changer, la démonstration du passage de la proposition 2 à la proposition 3.

On notera pour terminer que la proposition 5, qui établit l'existence d'un quasi-équilibre intransitif dans le cas où $Y \neq \{0\}$ et avec des préférences dépendant des prix et des consommations des autres consommateurs, contient le résultat équivalent de Arrow-Hahn (1), d'existence, sous la même hypothèse de non-saturation des préférences, d'un équilibre transitif "compensé", avec des préférences dépendant des prix et sous l'hypothèse de libre-disposition $(Y = - R^{\ell}_{+})$.

IV. DU QUASI-EQUILIBRE A L'EQUILIBRE D'UNE ECONOMIE D'ECHANGE.

Les correspondances β^i, qui ont servi dans les propositions 2 et 4 à définir un β-quasi-équilibre de l'économie abstraite $\mathcal{E}$ associée à l'économie d'échange E, ont un graphe ouvert; il en est de même des correspondances δ^i qui interviennent dans la définition du quasi-équilibre de l'économie d'échange E. Il ressort donc des remarques qui ont été faites à la fin de la partie II de ce chapitre que, sous réserve de l'hypothèse :

$$\forall\, i = 1, \ldots, m\ ,\quad \forall (p, x) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{j=1}^{m} X^j$$

$$y^i \in P^i(p, x) \text{ et } z^i \in X^i \Rightarrow \exists \lambda, 0 < \lambda \leq 1 \text{ et } (\lambda z^i + (1-\lambda) y^i) \in P^i(p, x)$$

la recherche des conditions de passage de l'existence d'un quasi-équilibre à l'existence d'un équilibre se ramène à la recherche de conditions assurant la non-vacuité de tous les $\delta^i(\overline{p})$ en tout quasi-équilibre $(\overline{p}, \overline{x})$ de E obtenu par application de la proposition 3 ou de la proposition 5.

./.

(1) Arrow-Hahn (1971) chapitre VI, 1.

Comme au chapitre II, ces conditions consistent en une hypothèse forte de survivance des consommateurs (hypothèse d) de la proposition 6) ou alternativement, en l'adjonction, à une hypothèse affaiblie de survivance des consommateurs, d'une condition d'irréductibilité de l'économie (hypothèse e') des propositions 7 et 8).

Proposition 6.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe, fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $-R_+^\ell$, vérifie les hypothèses a), b), c), e) de la proposition 3, ou, si $Y \neq \{0\}$ les hypothèses de même rang dans la proposition 5, ainsi que :

b') $\forall\, i = 1,\dots, m$, $\forall (p, x) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{j=1}^{m} X^j$

$y^i \in P^i(p, x)$ et $z^i \in X^i \rightarrow \exists \lambda$, $0 < \lambda \leq 1$ et $(\lambda z^i + (1-\lambda) y^i) \in P^i(p, x)$

d) $\forall\, i = 1,\dots, m$, $\omega^i \in i(X^i - Y)$

alors il existe $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point d'équilibre de E.

Démonstration.

Soit, en application de la proposition 3 (ou de la proposition 5, si $Y \neq \{0\}$), $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ un point de quasi-équilibre de E. Quel que soit $i = 1,\dots, m$, la variété linéaire $\{z \in R^\ell / \bar{p}.z = \bar{p}.\omega^i\}$, qui est de dimension $(\ell - 1)$, ne contient pas $(X^i - Y)$ qui est de dimension ℓ, et il existe $z^i \in X^i - Y$ tel que $\bar{p}.z' < \bar{p}.\omega^i$. Si $z^i = x^i - y^i$, on a a fortiori : $\bar{p}.x^i \leq \bar{p}.z^i < \bar{p}.\omega^i$, de sorte que $\delta^i(\bar{p}) \neq \phi$, $\forall\, i = 1,\dots, m$.

On déduit alors de l'hypothèse b') :

$\gamma^i(\bar{p}) \cap P^i(\bar{x}) \neq \phi \Rightarrow \delta^i(\bar{p}) \cap P^i(\bar{x}) \neq \phi$

et $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ est un équilibre de E.

C.Q.F.D.

./.

L'irréductibilité d'une économie d'échange intransitive, dans laquelles les préférences des consommateurs dépendent des prix et des consommations des autres consommateurs, peut faire l'objet des deux définitions 1 et 2 ci-dessous, qui généralisent les définitions 3 et 2 de la partie IV du chapitre II, et qui conduisent respectivement aux propositions 7 èt 8 d'existence d'un équilibre.

Définition 1.

Une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ est dite *Bergstrom-irréductible* si pour tout sous-ensemble propre J de $I = \{1,\dots,m\}$, pour toute allocation x réalisable et pour tout système de prix $p \in S \cap Y^o$, il existe une allocation x' et un système de m nombres $\theta > 0, i=1,\dots,m$, vérifiant :

$$(1) \quad \forall\, i \in J,\ x'^i \in \overline{\hat{P}^i(p,x)} \quad \text{et} \quad \exists\, j \in J,\quad x'^j \in \hat{P}^j(p,x)$$

$$(2) \quad \sum_{i \in J} \theta^i (x'^i - \omega^i) \in Y$$

Proposition 7.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$, comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $-R^\ell_+$, vérifie les hypothèses a), b), c), e) de la proposition 3, ou si $Y \neq \{0\}$, les hypothèses de même rang de la proposition 5, l'hypothèse b') de la proposition 6) et

d) $\forall\, i = 1,\dots, m$, $\omega^i \in X^i - Y$ et $\sum \omega^i \in i(\sum_{i=1}^{m} X^i - Y)$

e') E est Bergstrom-irréductible

alors il existe $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point d'équilibre de E.

Démonstration.

L'hypothèse d) de la proposition 7 impliquant l'hypothèse d) des propositions 3 et 5, soit $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ un point de quasi-équilibre de E, obtenu en application de l'une ou l'autre de ces deux propositions.

./.

Désignons par J le sous-ensemble de I défini par

$J = \{i \in I \ / \ \delta^{i}(\overline{p})\} \neq \phi.$

De par l'hypothèse d), la variété linéaire $\{z \in r^{\ell} / \ \overline{p}.z = \overline{p}. \sum_{i=1}^{m} \omega^{i}\}$ ne contient pas $(\sum_{i=1}^{m} X^{i} - Y)$ et il existe $z \in \sum_{i=1}^{m} X^{i} - Y$ tel que $\overline{p}.z < \overline{p}. \Sigma\omega^{i}$.

Si $z = \sum_{i=1}^{m} x^{i} - y$, on a a-fortiori, $\overline{p}. \sum_{i=1}^{m} x^{i} \leq \overline{p}.z < \overline{p}. \sum_{i=1}^{m} \omega^{i}$, ce qui montre que $J \neq \phi$.

Si $J \neq I$, soit alors x' vérifiant par rapport à $(\overline{p}, \overline{x})$ les relations (1) et (2) de la définition 1.

$\forall \ i \in J, \quad x'^{i} \in \widehat{P^{i}(\overline{p}, \overline{x})} \Rightarrow \overline{p}.x'^{i} \geq \overline{p}.\omega^{i}$

D'autre part, du fait de l'hypothèse b'),

$\delta^{j}(\overline{p}) \neq \phi$ et $x'^{j} \in \widehat{P^{j}}(\overline{p}, \overline{x}) \Rightarrow \overline{p}.x'^{j} > \overline{p}.\omega^{j} = \overline{p}.\overline{x}^{j}$

De sorte que $\overline{p}. \sum_{i\in J} (x'^{i} - \omega^{i}) > 0$, d'où l'on déduit :

$\overline{p}. \sum_{i\in I\setminus J} (x'^{i} - \omega^{i}) < 0$. Il existe ainsi $i \in I \setminus J$ tel que

$\overline{p}.x'^{i} < \overline{p}.\omega^{i}$, ce qui est contradictoire avec la définition de J.

Finalement, $J = I$ et $\delta^{i}(\overline{p}) \neq \phi$, $\forall \ i \in I$. On en déduit, comme dans la démonstration de la proposition 4, que $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$ est un équilibre de E.

C.Q.F.D.

<u>Définition 2</u>.

Une économie d'échange $E = ((X^{i}, P^{i}, \omega^{i})_{i=1,\dots,m}, Y)$ est dite *Arrow-Hahn-irréductible* si pour tout sous-ensemble propre J de $I = \{1,\dots,m\}$, pour toute allocation x réalisable et pour tout système de prix $p \in S \cap Y^{o}$, il existe une allocation x' vérifiant les relations (1) de la définition 1 et

(2) $\forall \ K = 1,\dots, \ell$,

$\sum_{i\in J} x'^{i}_{k} > \sum_{i\in J} x^{i}_{k} \Rightarrow$ il existe $i \in I\setminus J$ et $\lambda^{i}_{k} > 0$ tels que $\omega^{i} - \lambda^{i}_{k} e^{k} \in X^{i} - Y$

$\sum_{i\in J} x'^{i}_{k} < \sum_{i\in J} x^{i}_{k}$ il existe $i \in I\setminus J$ et $\lambda^{i}_{k} > 0$ tels que $\omega^{i} + \lambda^{i}_{k} e^{k} \in X^{i} - Y$

./.

Proposition 8.

Si une économie d'échange $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ comportant des activités de disposition décrites par un cône convexe fermé Y de sommet 0, contenu dans l'orthant négatif $-R^\ell_+$, vérifie les hypothèses a), b), c), e) de la proposition 3, ou, si $Y \neq \{0\}$, les hypothèses de même rang de la proposition 5, l'hypohtèse b') de la proposition 6 et :

d) $\forall\, i = 1,\dots,m,\ \omega^i \in X^i - Y$ et $\sum_{i=1}^{m} \omega^i \in i(\sum_{i=1}^{m} X^i - Y)$

e') E est Arrow-Hahn-irréductible

alors il existe $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y}) \in (S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^{m} X^i \times Y$, point d'équilibre de E.

Démonstration.

Soit, en effet, $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$ un point de quasi-équilibre de E obtenu en application de la proposition 3 ou de la proposition 5. On voit comme dans la démonstration de la proposition 7 que $J = \{i \in I / \delta^i(\overline{p}) \neq \phi\}$ est non-vide.

Si $J \neq I$, soit alors x' vérifiant par rapport à $(\overline{p}, \overline{x})$, les relations (1) et (2) de la définition 2. Comme précédemment, $\overline{p}.\sum_{i\in J} (x'^i - \omega^i) = \overline{p}.\sum_{i\in J} (x'^i - \overline{x}^i) > 0$, de sorte qu'il existe $k \in \{1,2,\dots,\ell\}$ tel que : $\overline{p}_k \sum_{i\in J} (x'^i_k - \overline{x}^i_k) > 0$. D'après les conditions (2) de la définition 2, il existe alors $i \in I\backslash J$ tel que $\delta^i(\overline{p}) \neq \phi$, contrairement à la définition de J.

On a donc $J = I$ et $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$ est un équilibre de E.

C.Q.F.D.

On notera pour terminer, que si les préférences des consommateurs dépendent effectivement des prix, l'hypothèse d'irréductibilité de l'économie n'implique pas nécessairement l'hypothèse renforcée e) de non-saturation des préférences de la proposition 3, alors qu'elle implique l'hypothèse e) de la proposition 5.

°

° °

ANNEXE I

PROPRIETES MATHEMATIQUES DES PREFERENCES

CONTINUITE ET CONVEXITE

L'existence d'un équilibre transitif a été démontrée sous les hypothèses suivantes de continuité et de convexité des correspondances de préférences strictes P^i, associées à des préordres totaux de préférences sur les ensembles de consommation X^i :

H_1 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ \forall\ x^i \in X^i,\ (P^i)^{-1}(x^i)$ est ouvert

H_2 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ \forall\ x^i \in X^i,\ y^i \in P^i(x^i)$ et $z^i \in X^i \Rightarrow$

$$\exists\ \lambda,\ 0 < \lambda \leq 1\ ,\ \lambda z^i + (1-\lambda) y^i \in P^i(x^i)$$

H_3 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ \forall\ x^i \in X^i,\ x^i \notin \text{conv } P^i(x^i)$

L'existence d'un équilibre intransitif a été démontrée sous des hypothèses analogues portant sur des correspondances de préférence (stricte) P^i, définies sur l'ensemble $X = \prod_{i=1}^{m} X^i$, produit des ensembles de consommation (et, si les préférences dépendent des prix, de l'ensemble de définition des prix X^o), à valeurs dans X^i :

H'_1 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ P^i$ est sci sur X

H'_2 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ \forall x \in X,\ y^i \in P^i(x)$ et $z^i \in X \Rightarrow$

$$\exists\ \lambda\ ,\ 0 < \lambda \leq 1,\ \lambda z^i + (1-\lambda) y^i \in P^i(x)$$

H'_3 - $\forall\ i = 1,\dots, m,\ \forall\ x \in X,\ x^i \notin \text{conv } P^i(x)$.

L'hypothèse H_1 postule ce que l'on pourrait appeler la *semi-continuité inférieure forte* des correspondances P^i tandis que l'hypothèse H'_1 ne postule que leur semi-continuité inférieure. Les hypothèses H_2 et H'_2 sont chacune impliquées par l'hypothèse que les correspondances P^i sont à valeurs ouvertes dans X^i. La conjonction de H_1 et H_2 ou de H'_1 et H'_2 est impliquée par l'hypothèse d'un graphe ouvert dans $X^i \times X^i$ (équilibre transitif) ou dans $X \times X^i$ (équilibre intransitif) pour les correspondances P^i. Enfin les hypothèses H_3 et H'_3 sont impliquées par la

./.

convexité des ensembles-images des correspondances P^i; on a déjà indiqué (chapitre II) que, dans le cas (transitif) de correspondances P^i associées à des préordres totaux sur X^i, l'hypothèse H_3 est trivialement équivalente à la convexité pour tout x^i des ensembles $P^i(x^i)$.

Les relations entre ces deux groupes d'hypothèses et les hypothèses plus classiques d'ouverture du graphe des correspondances P^i et de convexité de leurs ensembles-images sont précisées par les propositions suivantes :

PROPOSITION 1.

Si P^i est la correspondance de préférence stricte associée à un préordre total sur un espace topologique X^i, les hypothèses

$\forall\, x^i \in X^i$, $(P^i)^{-1}(x^i)$ est ouvert dans X^i

$\forall\, x^i \in X^i$, $P^i(x^i)$ est ouvert dans X^i

impliquent l'ouverture dans $X^i \times X^i$ du graphe de P^i.

Démonstration.

Soit, en effet, $G^i = \{(z^i, t^i) \in X^i \times X^i / t^i \in P^i(z^i)\}$ le graphe de P^i et soit $(x^i, x'^i) \in G^i$.

Si il existe $z^i \in P^i(x^i) \cap (P^i)^{-1}(x'^i)$, $(x^i, x'^i) \in (P^i)^{-1}(z^i) \times P^i(z^i) \subset G^i$.

Si $P^i(x^i) \cap (P^i)^{-1}(x'^i) = \phi$, $(x^i, x'^i) \in (P^i)^{-1}(x'^i) \times P^i(x^i) \subset G^i$

Dans les deux cas, (x^i, x'^i) appartient à un ouvert de $X^i \times X^i$ contenu dans G^i.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2. (Shafer (1974), Bergstrom-Parks-Rader (1976)).

Si X^i est un sous-ensemble convexe de R^ℓ et si $P^i : X \to X^i$ est à valeurs convexes, les hypothèses

$\forall\, y^i \in X^i$, $(P^i)^{-1}(y^i)$ est ouvert dans X

$\forall\, x \in X$, $P^i(x)$ est ouvert dans X^i

impliquent l'ouverture dans $X \times X^i$ du graphe de P^i.

./.

Démonstration.

Soit, en effet, (x, y^i) un point du graphe de P^i,
$G^i = \{(x, y^i) \in X \times X^i / y^i \in P^i(x)\}$.
Si X^i est de dimension p, $P^i(x)$, ouvert dans X^i, est également de dimension p. y^i appartient alors à l'intérieur relatif (1), $i^r(\mathrm{conv}\,(y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip})$, d'un p-simplexe dont les sommets $y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}$ appartiennent à $P^i(x)$. $i^r(\mathrm{conv}(y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}))$ est ouvert dans X^i et les relations $x' \in \bigcap_{k=o}^{p} (P^i)^{-1}(y^{ik})$ et $y'^i \in i_r(\mathrm{conv}(y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}))$ impliquent : $y'^i \in P^i(x')$, c'est-à-dire $(x', y'^i) \in G^i$, ce qui montre que G^i est ouvert dans $X \times X^i$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.

Si X^i est un sous-ensemble convexe de R^ℓ et si $P^i : X \to X^i$ est à valeurs convexes, les hypothèses :

- P^i est sci sur X
- $\forall\, x \in X$, $P^i(x)$ est ouvert dans X^i

impliquent l'ouverture dans $X \times X^i$ du graphe de P^i.

Démonstration.

En vertu du résultat précédent, il suffit de démontrer que $\forall\, y^i \in X^i$, $(P^i)^{-1}(y^i)$ est ouvert dans X. Soit donc $x \in (P^i)^{-1})(y^i)$. $y^i \in P^i(x)$ et comme précédemment, si X^i est de dimension p, y^i appartient à l'intérieur relatif $i^r(\mathrm{conv}(y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}))$ d'un p-simplexe dont les sommets $y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}$ appartiennent à $P^i(x)$.

Soient d'une part $V^{io}, \dots, V^{ip}$ des voisinages (dans X^i) de chacun des points $y^{io}, y^{i1}, \dots, y^{ip}$ tels que : $y'^i \in V^{ik}\ \forall\, k = 0 \dots p$ $\Rightarrow$ les points $y'^{io}, y'^{i1}, \dots, y'^{ip}$ sont affinement indépendants et $y^i \in i^r(\mathrm{conv}(y'^{io}, \dots, y'^{ip}))$.

---

(1) *L'intérieur relatif* d'un sous-ensemble convexe de R^ℓ est l'intérieur de cet ensemble pour la topologie induite par la topologie de R^ℓ sur la variété linéaire affine engendrée par l'ensemble. Pour la définition et les propriétés de cette notion, voir Rockafellar (1970).

./.

Soient, d'autre part, du fait de la semi-continuité inférieure de P^i, $U^{io}, U^{i1},\dots, U^{ip}$ des voisinages (dans X) de x vérifiant pour tout $k = 0,\dots, p$:

$$x' \in U^{ik} \Rightarrow P^i(x') \cap V^{ik} \neq \phi.$$

Si alors $x' \in \bigcap_{k=o}^{p} U^{ik}$ et si, pour tout $k = 0,\dots,p$ $y'^{ik} \in P^i(x') \cap V^{ik}$, on a :

$$y^i \in i^r(\mathrm{conv}(y'^{io},\dots, y'^{ip})) \subset P^i(x')$$

de sorte que :

$$\bigcap_{k=o}^{p} U^{ik} \subset (P^i)^{-1}(y^i)$$

ce qui montre que $(P^i)^{-1}(y^i)$ est ouvert dans X.

C.Q.F.D.

On notera bien que dans la démonstration de la proposition précédente, la définition des voisinages (dans X^i) $V^{io},\dots, V^{ip}$ des points $y^{io}, y^{i1},\dots, y^{ip}$ de $P^i(x)$ tels que y^i appartienne à l'intérieur relatif du simplexe de sommets $y'^{io}, y'^{i1},\dots, y'^{ip}$ dès que chacun des y'^{ik} appartient à V^{ik} n'est possible que parce que $P^i(x)$ et X^i sont de même dimension. L'hypothèse que P^i est à valeurs ouvertes dans X^i joue ainsi un rôle fondamental. Il serait d'ailleurs trivialement faux de croire que toute correspondance $P^i : X \to X^i$ sci et à valeurs convexes est fortement semi-continue, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall\, y^i \in X^i,\ (P^i)^{-1}(y^i) \text{ est ouvert dans X.}$$

La proposition 1 est connue depuis longtemps. La proposition 3 nous a été suggéré par B. CORNET.

La proposition 1 montre qu'il suffit, dans les conditions d'existence de l'équilibre transitif, de remplacer l'hypothèse H_2 par l'ouverture dans X^i des valeurs des correspondances P^i pour retrouver la condition traditionnelle d'ouverture (dans $X^i \times X^i$) du graphe des correspondances P^i.

./.

Puisque la conditions H_3 se confond alors avec la convexité des valeurs des correspondances P^i, la proposition 3 montre qu'il en est de même si les résultats d'existence d'un équilibre obtenus dans le chapitre III sont appliqués à l'équilibre transitif.

Dans le cas de préférence non transitives et totales, le remplacement de l'hypothèse H'_2 par l'ouverture des valeurs des correspondances P^i et le remplacement de l'hypothèse H'_3 par la convexité desvaleurs de P^i impliquent conjointement avec H_1 l'ouverture dans $X \times X^i$ du graphe des correspondances P^i.

L'affaiblissement des propriétés de continuité obtenu dans le chapitre III garde son intérêt pour l'existence d'un quasi-équilibre, et si les correspondances de préférence, tout en vérifiant l'hypothèse H'_3, ne sont pas à valeurs convexes. Bergstrom, Parks et Rader (1976) construisent, par exemple, des préférences dont toutes les valeurs ne sont pas convexes mais qui vérifient H'_3, fortement sci et à valeurs ouvertes, dont le graphe n'est pas ouvert.

./.

ANNEXE II

EQUILIBRE INTRANSITIF ET OPTIMUM

Les notations utilisées dans cette annexe sont celles du chapitre III.

Soit $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ une économie d'échange *pour laquelle on suppose que les préférences des consommateurs* $P^i : \prod_{j=1}^{m} X^j \to X^i$ *ne dépendent pas des prix*. On peut définir sur l'ensemble des allocations réalisables de E diverses notions de "dominance" qui déterminent autant de définitions de l'optimalité au sens de Pareto.

Proposons ici comme conditions alternatives de la *dominance* de l'allocation réalisable x par l'allocation réalisable x' :

1. $\forall i \in I = \{1,\dots,m\}$, $x'^i \in P^i(x)$
2. $\forall i \in I$, $x'^i \in \overline{P^i(x)}$ et $\exists j \in I$, $x'^j \in P^j(x)$
3. $\forall i \in I$, $x'^i \in \widehat{P^i}(x)$
4. $\forall i \in I$, $x'^i \in \overline{\widehat{P^i}(x)}$ et $\exists j \in I$, $x'^j \in \widehat{P^j}(x)$

Une allocation réalisable est un optimum de Pareto (au sens 1, 2, 3 ou 4) si elle n'est dominée (au sens 1, 2, 3 ou 4) par aucune autre allocation réalisable.

La définition 2 coïncide avec la définition habituellement adoptée quand les correspondances P^i sont les correspondances associées aux relations strictes de préordres totaux sur les ensembles de consommation X^i, indépendants des consommations des consommateurs $j \neq i$ et vérifiant certaines conditions de continuité.

Il en est de même de la définition 4 si les préordres totaux sont convexes, c'est-à-dire si les correspondances P^i et $\widehat{P^i}$ coïncident.

La définition 1 est la définition retenue par Gale et Mas Colell (1977).

./.

On remarquera que la dominance-1 implique la dominance-3, qui implique elle-même la dominance-4, et que la dominance -1 implique la dominance - 2, qui implique elle-même la dominance - 4.

Il en est de même, en sens inverse, pour l'optimalité pour laquelle on a les relations :

$$\text{optimal au sens 4} \begin{array}{l} \nearrow \text{ optimal au sens 2} \Rightarrow \text{optimal au sens 1} \\ \searrow \text{ optimal au sens 3} \Rightarrow \text{optimal au sens 1} \end{array}$$

L'existence d'un optimum au sens 3 (et donc au sens 1) peut être démontrée sous des conditions faibles :

PROPOSITION 1.

L'économie $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ admet un optimum au sens 3 si

a) $\forall i = 1,\dots,m$, X^i est fermé, convexe, borné inférieurement (pour l'ordre sur R^ℓ produit des ordres naturels sur R)

b) $\forall i = 1,\dots,m$, P^i est sci sur X

c) $\forall i = 1,\dots,m$, et $\forall x \in X$, $x^i \notin \operatorname{conv} P^i(x)$

d) $\sum_{i=1}^{m} \omega^i \in \sum_{i=1}^{m} X^i - Y$

Démonstration.

L'ensemble $\tilde{X} = \{x \in X / \sum_{i=1}^{m} x^i \in \{\Sigma\omega^i\} + Y\}$ est non-vide en vertu de l'hypothèse d); on sait qu'il est convexe et compact dans $R^{\ell m}$. La correspondance $P : \tilde{X} \to \tilde{X}$ définie par :

$$P(x) = \{x' \in \tilde{X} / x'^i \in \widehat{P^i}(x) \ , \ \forall i = 1,\dots,m\}$$

vérifie les hypothèses du corollaire 1 de la proposition 11 du chapitre 1. Il existe $\bar{x}$ tel que $P(\bar{x}) = \phi$; il est un optimum de Pareto au sens 3.

C.Q.F.D.

La démonstration d'une proposition d'existence pour un optimum-4 nécessite des précautions pour assurer, sans hypothèse de transitivité, les propriétés de convexité de la correspondance P' définie par :

$$P'(x) = \{x' \in X / x'^i \in \overline{\widehat{P^i}}(x) \quad \forall i \in I \ \text{ et } \ \exists_j \in I,\ x'^j \in \widehat{P^j}(x)\}$$

./.

On a par exemple :

PROPOSITION 2.

L'économie $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ admet un optimum au sens 4 si :

a) $\forall i = 1,\dots,m$, X^i est fermé, convexe, borné inférieurement (pour l'ordre sur R^ℓ produit des ordres naturels sur R

b) $\forall i = 1,\dots,m$, P^i est sci et à valeurs ouvertes sur X

c) $\forall i = 1,\dots,m$, P^i est à valeurs convexes et $\forall x \in X$, $x^i \notin P^i(x)$

d) $\sum_{i=1}^{m} \omega^i \in \sum_{i=1}^{m} X^i - Y$

Démonstration.

Comme précédemment $\tilde{X}$ est convexe et compact dans $R^{\ell m}$ et P' est sci.

Si $x'^i \in \overline{\widehat{P^i}(x)}$ et $x''^i \in \widehat{P^i}(x)$ et si $z^i = \lambda x'^i + (1-\lambda)x''^i$ il existe $\varepsilon > 0$

tel que $B_0(x''^i, \varepsilon) \subset \widehat{P^i}(x)$ et $\varepsilon' > 0$ tel que l'image, par l'homothétie de centre z^i et de rapport $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$, de tout point de $B_0(x'^i, \varepsilon')$ soit contenue dans $B_0(x''^i, \varepsilon)$. De $x'^i \in \overline{\widehat{P^i}(x)}$, on déduit que $z^i \in \widehat{P^i}(x)$, ce qui montre que P' est à valeurs convexes.

Comme pour tout x de $\tilde{X}$, on a : $x \notin P'(x)$, on en déduit l'existence de $\overline{x}$ tel que $P'(\overline{x}) = \phi$.

C.Q.F.D.

Les propriétés d'optimalité de l'équilibre tel qu'il a été défini dans le chapitre III sont exprimées dans la propriété suivante :

PROPOSITION 3.

Soit $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$ un équilibre de $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$.

$\overline{x}$ est un optimum de Pareto au sens 4 (et donc au sens 1, 2 et 3). Bien plus, il n'existe pas de sous-ensemble J de I, de système de nombres strictement positifs $(\theta^i)_{i\in J}$

./.

et d'allocation x vérifiant :

$$\begin{cases} (1) \quad x'^{i} \in \widehat{\overline{P^{i}(\overline{x})}} \quad \forall i \in J \quad \text{et} \quad \exists j \in J \ , \ x'^{j} \in \widehat{P^{j}}(\overline{x}) \\ (2) \quad \sum_{i \in J} \theta^{i} \, (x'^{i} - \omega^{i}) \in Y \end{cases}$$

Démonstration.

Soient en effet, J, $(\theta^{i})_{i \in j}$ et $x \in \prod_{i=1}^{m} X^{i}$ vérifiant les relations (1) et (2). On déduit facilement de (1)

$$\overline{p}.x'^{i} \geq \overline{p}.\omega^{i} \quad \forall i \in J \quad \text{et} \quad \overline{p}.x'^{j} > \overline{p}.\omega^{j}$$

Par sommation sur i, on a :

$\overline{p}.\sum_{i \in j} \theta^{i}(x'^{i} - \omega^{i}) > 0$, ce qui est contradictoire avec l'appartenance de p à Y^{o}.

C.Q.F.D.

La deuxième partie de la proposition 3 signifie qu'un équilibre de E est un élément du coeur de l'économie E pour la relation de dominance 4.

La possibilité d'associer à tout optimum de E un système de prix tel que l'allocation optimale soit une allocation d'équilibre dans l'économie déduite de E par une redistribution des ressources donnant à chaque consommateur, pour ressource initiale, sa composante dans l'allocation optimale est démontrée sous des conditions sur E qui sont précisées dans la proposition suivante et son corollaire :

PROPOSITION 4. (Gale et Mas Colell - 1977) (1)

$$\begin{cases} \text{Soit } E = ((X^{i}, P^{i}, \omega^{i})_{i=1,\dots,m}, Y). \text{ Sous les hypothèses :} \\ \text{a) } \forall i = 1,\dots,m. \ X^{i} \text{ est convexe} \\ \text{b) } \forall i = 1,\dots,m, \ \forall x \in X, \ P^{i}(x) \text{ est convexe et } x^{i} \notin P^{i}(x) \\ \text{c) } \forall i = 1,\dots,m, \ \forall x \text{ réalisable } x^{i} \in \overline{P^{i}(x)} \end{cases}$$

---

(1) La proposition 2 dans Fon et Otani (1979) est impliquée par ce résultat.

./.

Si $\overline{x}$ est un optimum de Pareto au sens de la définition 1, il existe $\overline{P} \in S \cap Y^o$ tel que $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{o})$ soit un quasi-équilibre de l'économie $E' = ((X^i, P^i, \overline{x}^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$.
Si de plus, pour tout $i = 1,\dots,m$, $\delta^i(\overline{p}) \neq \phi$ et si les P^i vérifient l'hypothèse de continuité :
$y^i \in P^i(x)$ et $z^i \in X^i \Rightarrow \exists\lambda,\ 0 < \lambda < 1,\ \lambda y^i + (1-\lambda)z^i \in P^i(x)$
$(\overline{p}, \overline{x}, \overline{o})$ est un équilibre de E'.

Démonstration.

Définissons en effet, pour tout $i = 1,\dots,m$,
$Z^i = \{z^i \in R^\ell / \overline{x}^i + z^i \in P^i(\overline{x})\}$ et $Z = \sum_{i=1}^m Z^i$.

Z est non vide (hypothèse c)) et convexe (hypothèses a) et b)). $Z \cap Y = \phi$ car $\sum_{i=1}^m z^i \in Z \cap Y$ implique

$$\sum_{i=1}^m (\overline{x}^i + z^i) \in (\{\Sigma\omega^i\} + Y) + Y) \subset \{\Sigma\omega^i\} + Y$$

et $\overline{x}^i + z^i \grave{\in} P^i(\overline{x})$, $\forall\, i = 1,\dots, m$ ce qui est contradictoire avec le fait que $\overline{x}$ est un optimum de Pareto au sens de la définition 1.

Appliquant alors le premier théorème de séparation aux ensembles convexes Z et Y et en tenant compte de ce que Y est un cône convexe fermé de sommet 0 contenu dans l'orthant négatif $(-R^\ell_+)$, on a : $\exists\overline{p} \in S$, $\overline{p}.y \leq 0$ $\forall y \in Y$ et $\overline{p}.z \geq 0$ $\forall z \in Z$

Si on remarque que l'hypothèse c) implique, pour tout $j = 1,\dots,m$, $0 \in \overline{Z}^j$, on déduit alors de ce qui précède :

$$\forall i = 1,\dots,m\ ,\ x'^i \in P^i(\overline{x}) \Rightarrow (x'^i - \overline{x}^i) \in \overline{Z} \Rightarrow \overline{p}.x'^i \geq \overline{p}.\overline{x}^i$$

ce qui montre que $(\overline{p}, \overline{x}, o) \in ((S \cap Y^o) \times \prod_{i=1}^m X^i \times Y)$ est un quasi-équilibre de E'.

Si, de plus, pour tout $i = 1,\dots,m$,
$\delta^i(\overline{p}) = \{x^i \in X^i / \overline{p}.x^i < \overline{p}.\ \omega^i = \overline{p}.\overline{x}^i\}$ est non vide, sous l'hypothèse de continuité indiquée pour les P^i,

$$x'^i \in P^i(\overline{x}) \Rightarrow \overline{p}.x'^i > \overline{p}.\overline{x}^i$$

ce qui montre que $(\overline{p}, \overline{x}, o)$ est un équilibre de E'.

./.

Corollaire 1.

La proposition 4 reste vraie pour un optimum au sens de la définition 3 (et a fortiori pour un optimum au sens de la définition 4), si l'hypothèse c) est remplacée par :

c') $\forall i = 1,\dots,m$, $\forall x$ réalisable, $P^i(x) \neq \phi$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la proposition 4 à l'économie $E'' = ((X^i, \widehat{P^i}, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$.

Un optimum de E au sens de la définition 3 est un optimum de E" au sens de la définition 1. C'est donc un quasi-équilibre (ou un équilibre) de $E''' = ((X^i, \widehat{P^i}, \bar{x}^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ et, a-fortiori, un équilibre de $E' = ((X^i, P^i, \bar{x}^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$.

C.Q.F.D.

On notera, pour terminer, que si les préférences dépendent des prix, on peut bien définir, comme le suggère Arrow-Hahn (1971), des notions de *dominance pour un système de prix* p : x' *p - domine* x si

1. $\forall i \in I$, $x'^i \in P^i(x,p)$
2. $\forall i \in I$, $x'^i \in \overline{P^i(x, p)}$ et $\exists_j \in I$, $x'^j \in P^j(x, p)$
3. $\forall i \in I$, $x'^i \in \widehat{P^i}(x, p)$
4. $\forall i \in I$, $x'^i \in \overline{\widehat{P^i}(x, p)}$ et $\exists_j \in I$, $x'^j \in \widehat{P^j}(x, p)$

et les notions correspondantes *d'optimalité de Pareto conditionnée au système de prix* p. Un équilibre $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ de $E = ((X^i, P^i, \omega^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$ est alors un *$\bar{p}$-optimum* de E aux sens 1, 2, 3 et 4 mais la proposition 4 et son corollaire ne permettent pas d'associer à un p-optimum $\bar{x}$ de E un système de prix $\bar{p}$ pour lequel $(\bar{p}, \bar{x}, o)$ soit un équilibre de $E' = ((X^i, P^i, \bar{x}^i)_{i=1,\dots,m}, Y)$.

./.

LISTE DES SYMBOLES MATHEMATIQUES

Ensembles

$x \in A$	x est un *élément* de l'ensemble A; x *appartient* à A
$x \notin A$	x n'appartient pas à A
$A \subset B$	tout élément de l'ensemble A est un élément de l'ensemble B; A est *inclus* dans B, A est un *sous-ensemble* de B
$A = B$	$A \subset B$ et $B \subset A$
ϕ	*ensemble vide*; ensemble qui ne contient aucun élément
$\{x\}$	ensemble dont x est le seul élément
$\{x,y,z,\dots\}$	ensemble dont les éléments sont $x,y,z, \dots$
$\{x \in A / \mathcal{P}(x)\}$	ensemble des éléments x de A qui vérifient la propriété $\mathcal{P}(x)$
$\forall x \in A, \mathcal{P}(x)$	pour tout x de A, la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée
$\exists x \in A, \mathcal{P}(x)$	il existe x dans A telle que la propriété $\mathcal{P}(x)$ soit vérifiée
$A \cup B$	*réunion* des ensembles A et B , ensemble dont tout élément appartient à A ou à B
$A \cap B$	*intersection* des ensembles A et B, ensemble dont tout élément appartient à A et à B
$\complement_X A$	si A est un sous-ensemble de X, ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à A; *complémentaire* de A dans X .
$A \setminus B$	ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B
$\bigcup_{i \in I} A^i$	si $(A^i)_{i \in I}$ est une *famille* d'ensembles, ensemble dont tout élément appartient à l'un au moins des A^i
$\bigcap_{i \in I} A^i$	ensemble dont tout élément appartient à tous les A^i
$A \times B$	*produit cartésien* des ensembles A et B, ensembles des couples ordonnés (a,b) d'un élément de A et d'un élément de B

$\prod_{i=1}^{m} A^i$ ensemble des m-tuples ordonnés $(a^1, a^2, \ldots, a^m)$ avec $a^i \in A^i$, $\forall i = 1,\ldots,m$; *produit cartésien* des m ensembles A^i

N ensembles des entiers naturels $\{1, 2, \ldots\}$.

Applications

$f : A \to B$ est une *application* de A dans B si à tout x de A correspond par f un et un seul élément de B : f(x).
On écrit aussi : $x \to f(x)$

$f^{-1}(D)$ si D est un sous-ensemble de B, $f^{-1}(D) = \{x \in A / f(x) \in D\}$ est l'*image inverse* par f de D

$f^{-1}(y)$ *image inverse* de y par f, $\{x \in A / y = f(x)\}$

$f(C)$ si C est un sous-ensemble de A,
$f(C) = \{y \in B / y = f(x),\ x \in C\}$ est l'*image* par f de C

$f_{/C}$ si C est un sous-ensemble de A, *restriction* de f à C, c'est-à-dire application de C dans B définie par :
$f_{/C}(x) = f(x)$

I_A *application identique* de A définie par :
$I_A(x) = x$

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des applications

$g \circ f : A \to C$ *application composée* de f et g définie par :
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Si f est injective $(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
et surjective $(\forall y \in B, \exists x \in C \ f(x) = y)$

$f^{-1} : B \to A$ *application inverse* de f définie par : $f^{-1}(y) = x$ avec $f(x) = y$

Correspondance

$\mathcal{P}(A)$ *ensemble des parties* de A, ensemble dont tout élément est un sous-ensemble de A

$\varphi : A \to B$ est une *correspondance* de A dans B si à tout x de A correspond par φ un et un seul sous-ensemble de B : $\varphi(x)$. On écrit aussi : $x \to \varphi(x)$. φ est une application de A dans $\mathcal{P}(B)$.

./.

$\varphi^{-1}(y)$	*image inverse* de y par φ, $\{x \in A / y \in \varphi(x)\}$
$\varphi(C)$	si C est un sous-ensemble de A, $\varphi(C) = \{y \in B / y \in \varphi(x),\ x \in C\}$ est l'*image* par φ de C
$\varphi^{+}(D)$	si D est un sous-ensemble de B $\varphi^{+}(D) = \{x \in A \,/\, \varphi(x) \subset D\}$
$\varphi^{-}(D)$	$\varphi^{-}(D) = \{x \in A \,/\, \varphi(x) \cap D \neq \phi\}$. si $y \in B$, $\varphi^{-}(\{y\}) = \varphi^{-1}(y)$.
φ/C	si C est un sous-ensemble de A, $\varphi_{/C}$ est la correspondance $C \to B$ définie par : $\varphi_{/C}(x) = \varphi(x)$; c'est la *restriction* de φ à C
G_φ	*graphe* de φ, $\{(x,y) \in A \times B / y \in \varphi(x)\}$.

Relations

Si R est une *relation binaire* sur un ensemble X, définie par son graphe $G_R = \{(x,y) \in X \times X / (y\ R\ x\}$, identifier R à la correspondance de même graphe conduit à poser :

$$R(x) \quad \{y \in X / y\ R\ x\}$$
$$R^{-1}(x) \quad \{y \in X / x\ R\ y\}$$

D'autre part, à R on associe :

P	*partie asymétrique* de R : $xPy \iff xRy$ et non yRx et à P, si X est un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel E :
$\hat{P}$	$y\hat{P}x \iff \exists z \in X$ et λ, $0 \leq \lambda < 1$, $z \in P(x)$ et $y = \lambda x + (1-\lambda)z$

Droite réelle

R	ensemble des nombres réels
R_+	ensemble des nombres réels ≥ 0
	Si A est un sous-ensemble de R,
sup A	*borne supérieure stricte* de A = plus petit des majorants de A; $x \geq y\ \ \forall y \in A \Rightarrow x \geq \sup A$
inf A	*borne inférieure stricte* de A = plus grand des minorants de A; $x \leq y\ \ \forall y \in A \Rightarrow x \leq \inf A$
max A	*plus grand élément* de A
min A	*plus petit élément* de A

./.

Si A est un ensemble , B un sous-ensemble de A et $f : A \to R$ une application de A dans R :

$\sup\limits_{x \in B} f(x)$ — $\sup \{y \in R \, / \, y = f(x),\ x \in B\} = \sup\limits_{x \in B} f(x)$

$\inf\limits_{x \in B} f(x)$ — $\inf \{y \in R \, / \, y = f(x),\ x \in B\} = \inf\limits_{x \in B} f(x)$

$\max\limits_{x \in B} f(x)$ — $\max \{y \in R \, / \, y = f(x),\ x \in B\} = \max\limits_{x \in B} f(x)$

$\min\limits_{x \in B} f(x)$ — $\min \{y \in R \, / \, y = f(x),\ x \in B\} = \min\limits_{x \in B} f(x)$

Espaces topologiques, espaces métriques

Soit X un *espace topologique*, x, x_n des éléments de X, A un sous-ensemble de X

$\mathcal{V}(x)$ — *système des voisinages* de x, c'est-à-dire des sous-ensembles de X contenant un ouvert (de X) contenant x

$\overline{A}$ — *adhérence de A* = plus petit sous-ensemble fermé de X contenant A

$\overset{\circ}{A}$ ou $i(A)$ — *intérieur* de A = plus grand sous-ensemble ouvert de X contenu dans A

$F_r(A)$ — *frontière* de A = $\overline{A} \setminus i(A)$

(x^n) — suite d'éléments de X

(x^{n_q}) — *suite partielle* $(q = 1, 2 \ldots)$ extraite de la suite (x^n)

$x^n \to x$ — x est la *limite* de la suite (x^n); la suite (x^n) converge vers x

Si X est un *espace métrique* , si d est la distance sur X et si r est un nombre réel positif

$B_o(x, r)$ — *boule ouverte* de centre x et de rayon r = $\{y \in X \, / \, d(x, y) < r\}$

$B_f(x, r)$ — *boule fermée* de centre x et de rayon r = $\{y \in X \, / \, d(x, y) \leq r\}$

$d(x, A)$ — *distance de x à l'ensemble A* = $\inf\limits_{y \in A} d(x, y)$

./.

Si f est une application de l'espace topologique X dans R_+

supp f — *support de f* = adhérence (dans X) de l'ensemble $\{x \in X / f(x) > 0\}$

Espaces vectoriels, espaces vectoriels topologiques

Soit E un espace vectoriel réel, $a^o, \ldots, a^p$ des éléments (ou points) de E, A, B, A^i des sous-ensembles de E, λ, μ, λ^i des éléments de R

$A + B$ — $\{z \in E / z = x + y, x \in A, y \in B\}$

$A - B$ — $\{z \in E / z = x - y, x \in A, y \in B\}$

$\lambda A + \mu B$ — $\{z \in E / z = \lambda x + \mu y, x \in A, y \in B\}$

$\sum_{i=o}^{p} \lambda_i A^i$ — $\{z \in E / z = \sum_{i=o}^{p} \lambda_i x^i, x^i \in A^i, \forall_i = 0, 1 \ldots p\}$

conv $(\{a^o, a^1, \ldots, a^p\})$ — *polyèdre convexe* de sommets $a^o, a^1, \ldots, a^p$; ensemble des combinaisons convexes $\sum_{i=o}^{p} \lambda_i a^i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=o}^{p} \lambda_i = 1$

conv A — *enveloppe convexe* de A; plus petit sous-ensemble convexe de E contenant A

E^* — *dual algébrique* de E, espace vectoriel des *formes linéaires* sur E

Si E est un espace vectoriel topologique

E' — *dual topologique* de E, espace vectoriel des formes linéaires continues sur E

Si P est un cône convexe de sommet 0 dans E,

P^o — *cône polaire de P* $\{p \in E' / p(x) \leq 0 \quad \forall x \in P\}$

Si P est un cône convexe de sommet 0 dans E'

P^o — *cône polaire* de $P = \{x \in E / p(x) \leq 0 \quad \forall p \in P\}$

./.

Espace Euclidien de dimension ℓ

R^ℓ	espace vectoriel de ℓ-tuples ordonnés $(x_1, X_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de R Si x et y appartiennent à R^ℓ
$x \leq y$	$x_k \leq y_k \quad \forall k = 1, \ldots, \ell$
$x < y$	$x \leq y$ et $x \neq y$
$x << y$	$x_k < y_k \quad \forall k = 1, \ldots, \ell$
R^ℓ_+	*orthant positif* de $R^\ell = \{x \in R^\ell / x \geq 0\}$
$x.y$	*produit scalaire* de x et y; $x.y = \sum_{k=1}^{\ell} x_k y_k$
$\|x\|$	*norme euclidienne* de x; $\|x\| = \sqrt{x.x}$
B	*boule unité* $= \{x \in R^\ell / \|x\| \leq 1\}$
S	*sphère unité* $= \{x \in R^\ell / \|x\| = 1\}$

On sait qu'on peut identifier R^ℓ, $(R^\ell)^*$ et $(R^\ell)'$. En conséquence, si P est un cône convexe de sommet O dans R^ℓ

P^o	*cône polaire* de $P = \{x \in R^\ell / p.x \leq 0 \quad \forall p \in P\}$
P^{oo}	*double polaire* de $P = \{P \in R^\ell / p.x \leq 0 \quad \forall x \in P^o\}$

Si A est un sous-ensemble convexe de R^ℓ, soit V(A) la *variété linéaire affine* engendrée par A, c'est-à-dire la plus petite variété linéaire affine de R^ℓ contenant A.

$i^r(A)$	*intérieure relatif* de A = intérieur de A pour la topologie induite sur V(A) par la topologie de R^ℓ
$F^r_r(A)$	*frontière relative* de $A = \overline{A} \backslash i^r(A)$.

REFERENCES

K.J. ARROW - 1951 - "An extension of the basic theorems of the classical welfare economics" dans *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 507-532.

K.J. ARROW et G. DEBREU - 1954 - "Existence of equilibrium for a competitive economy" *Econometrica*, vol 22, n° 3, 265-290

K.J. ARROW et F.H.HAHN - 1971 - *General Competitive Analysis*, San Francisco : Holden-Day.

C. BERGE - 1959 - *Espaces topologiques et fonctions multivoques*, Dunod - Paris.

G.M. BERGMAN et B.R. HALPERN - 1968 - "A fixed point theorem for inward and outward maps", *Trans. Amer. Math. Soc.* 130, 353-358.

T.C. BERGSTROM - 1975 - "The existence of maximal elements and equilibria in the absence of transitivity", Ronéotypé, University of Michigan.
1976 - "How to discard "free disposability" - At no cost" - *Journal of Mathematical Economics* 3, 131-134.

T.C. BERGSTROM, R.P. PARKS et T. RADER - 1976 - "Preferences which have open graphs", *Journal of Mathematical Economics* 3, 265-268.

C. BIDARD - 1975 - *Equilibre général et spécialisation internationale* - Thèse d'Etat - Paris I ; voir plus spécialement dans le chapitre 10, les commentaires sur le lemme de Gale-Nikaïdo-Debreu.

H.F. BOHNENBLUST et S. KARLIN - 1950 - "On a theorem of Ville", *Contributions to the theory of games, Annals of Mathematical Studies* 24, Princeton University Press, 155-160.

A. BORGLIN et H. KEIDING - 1976 - "Existence of equilibrium actions and of equilibrium", *Journal of Mathematical Economics* 3, 313-316.

N. BOURBAKI - 1966 - *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I et II, deuxième édition Hermann, Paris.
1971-1974 - *Topologie générale*, nouvelle édition, chapitres I à IV et chapitres V à X, Hermann, Paris.

F. BROWDER - 1968 - "The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces", *Math. Annalen* 177, 283-301.

A. CELLINA - 1969 - "Approximation of set valued functions and fixed point theorems" *Annali di Mathematica pura ed applicata* IV, LXXXII, 17-24.

B. CORNET - 1975 - "Fixed point and surjectivity theorems for correspondences; applications" Ronéotypé Université de Paris-Dauphine.

G. DEBREU - 1952 - "A social equilibrium existence theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 38, 886-893

- 1956 - "Market equilibrium", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 42, 876-878

- 1959 - *Theory of Value*, Cowles Foundation Monograph 17, Wiley, New-York
Traduction française : *Théorie de la valeur. Une analyse axiomatique de l'équilibre économique*, Dunod, Paris 1966

- 1962 - "New concepts and techniques for equilibrium analysis", *International Economic Review* 3, 257-272

- 1964 - "Continuity properties of Paretian utility" *International Economic Review* 5, 285-293

./.

- 1974 - "Four aspects of the mathematical theory of economic equilibrium "*Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver, 65-77

K. FAN - 1952 - "Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 38, 121-126

- 1961 - "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", *Math Annalen* 142, 305-310

- 1969 - "Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder" *Math. Z.* 112, 234-240

- 1970 - "Extensions of two fixed point theorems of Browder" dans *Set-valued mappings, selections and topological properties of* 2^X. Lecture notes in mathematics 171 - Springer-Verlag-Berlin Heidelberg - New York, 12-16

1972 - "A minimax inequality and applications" dans *Inequalities* III, édité par SHISHA O. Academic Press, New-York et Londres, 103-113.

P.C. FISHBURN - 1970 - *Utility theory for decision making*, Wiley, New-York.

V. FON et Y. OTANI - 1979 - "Classical welfare theoremswith non transitive and non complete preferences", *Journal of Economic Theory* 20, 409-418.

D. GALE - 1955 - "The law of supply and demand", *Mathematica Scandinavica* 3, 155-169.

D. GALE et A. MAS-COLELL - 1975 - "An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences", *Journal of Mathematical Economics* 2, 9-15

1977 - "On the role of complete transitive preferences in equilibrium theory" dans G. SCHWÖDIAUER (ed) *Equilibrium and Disequilibrium in Economic Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 7-14.

M. GEISTDOERFER-FLORENZANO - 1979 - a) "The Gale-Nikaïdo-Debreu lemma and the existence of transitive equilibrium with or without the free-disposal assumption" Ronéotypé -CNRS-CEPREMAP

- 1979 - b) "Quasi-équilibre dans une économie abstraite non transitive" Ronéotypé -CNRS-CEPREMAP.

I.L. GLICKSBERG - 1952 - "A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points", *Proc. Amer. Math. Soc.* 3, 170-174.

J. GREENBERG - 1977 - "Quasi-equilibrium in abstract economies without ordered preferences", *Journal of Mathematical Economics* 4, 163-165.

O.D. HART et H.W. KUHN - 1975 - "A proof of the existence of equilibrium without the free disposal assumption" *Journal of Mathematical Economics* 2, 335-343.

W. HILDENBRAND - 1974 - *Core and equilibria in a large economy*, Princeton University Press.

W. HILDENBRAND et A.P. KIRMAN - 1976 - *Introduction to equilibrium analysis*, North Holland Amsterdam, Oxford; voir la démonstration du théorème de Kakutani dans l'appendice.

S. KAKUTANI - 1941 - "A generalization of Brouwer's fixed point theorem" *Duke Mathematical Journal* 8, 457-459.

H.W. KUHN - 1956 - a) "A note on the law of supply and demand", *Mathematical Scandinavica* 4, 143-146

- 1956 - b) "On a theorem of Wald", *Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematical Studies* n° 38, Princeton University Press, 265-273.

J.M. LASRY et R. ROBERT - 1974 - "Degré et théorèmes de point fixe pour les fonctions multivoques - Application", Ronéotypé, Université de Paris-Dauphine.

L. Mc KENZIE - 1954 - "On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems", *Econometrica* 22, 147-161

- 1955 - "Competitve equilibrium with dependent consumer preferences" dans H.A. ANTOSIEWICZ (ed), *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming* (National Bureau of Standards, Washington DC), 277-294

- 1959 - "On the existence of general equilibrium for a competitive market", *Econometrica* 27, 54-71

- 1961 - "On the existence of general equilibrium : some corrections", *Econometrica* 29, 247-248.

A. MAS-COLELL - 1974 - a) "A note on a theorem of F. Browder", *Mathematical Programming* 6, 229-233

1974 - b) "An equilibrium existence theorem without complete or transitive preferences, *Journal of Mathematical Economics* 1, 237-246

E. MICHAEL - 1956 - "Continuous Selections I" - *Annals of Mathematics* 63, 361-382

- 1957 - "Continuous Selections III" - *Annals of Mathematics* 65, 375-390

- 1970 - "A survey of continuous Selections" dans A. DOLD et B. ECKMAN, *Set valued mappings, selection and topological Properties of* 2^X, *Lectures Notes in Mathematics* n° 171, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 54-58.

J. NASH - 1950 - "Equilibrium points in N - person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 36, 48-49.

T. NEGISHI - 1960 - "Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy", *Metroeconomica* 12, 92-98.

H. NIKAIDO - 1956 - "On the classical multilateral exchange problem", *Metroeconomica* 8, 135-145

1957 - "A supplementary note to NIKAIDO (1956), *Metroeconomica* 9

1968 - *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New-York et Londres.

T. RADER - 1963 - "The existence of a utility function to represent preferences" *Review of Economics Studies* 30, 229-232.

1974 - "Edgeworth exchange and general economic equilibrium" *Yale Economic Essays* 4, 133-180.

R.T. ROCKAFELLAR - 1970 - *Convex Analysis* Princeton University Press.

M. ROGALSKI - 1972 - "Surjectivité d'applications multivoques dans les convexes compacts" - *Bull. Sc. Math.* - Deuxième série - 96, 83-87.

./.

D. SCHMEIDLER - 1969 - "Competitive equilibria in markets with a continuim of traders and incomplete preferences" *Econometrica* 37, 578-585.

W. SHAFER - 1974 - "The nontransitive consumer" *Econometrica* 42, 913-919

- 1976 - "Equilibrium in economies without ordered preferences or free disposal", *Journal of Mathematical Economics* 3, 135-137

W. SHAFER et H. SONNENSCHEIN - 1975 - a) "Some theorems on the existence of competitive equilibrium", *Journal of Economic Theory* 11, 83-93

- 1975 - b) "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences", *Journal of Mathematical Economics* 2, 345-348.

H. SONNENSCHEIN - 1971 - "Demand theory without transitive preferences with applications to the theory of competitive equilibrium" dans J. CHIPMAN, L. HURWICZ, M. RICHTER et H. SONNENSCHEIN *Preferences, Utility and Demand,* Harcourt-Brace-Jovanovich, New-York.

F. TERKELSEN - 1974 - "A short proof of Fan's fixed point theorem", *Proceedings of the American Mathematical Society* 42, 643-644.

H. UZAWA - 1962 - "Walras existence theorem and Brouwer's fixed point theorem", *Economic Studies Quarterly* 13 n° 1.

A. WALD - 1933-1934 - "Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquinms* n° 6, 12-20

- 1934-35 - "Über die produktions-gleichungen der ÖKonomischen Wertlehre", *ibid* n° 7, 1-6

- 1936 - "Über einige Gleichungssysteme der mathematischen ÖKonomie" *Zeitschrift für NationalöKonomie* n° 7, 637-670 traduit sous le titre "On some systems of equations of mathematical economics", *Econometrica* 19 (1951), 368-403.

C. WEDDEPOHL - 1977 - "Equilibrium in a market with incomplete preferences where the number of consumers may be finite" dans G. SCHWÖDIAUER (ed) *Equilibrium and Disequilibrium in Economic Theory,* D. REIDEL Publishing Company, Dordercht, Holland.

o

o o