JANVIER 1993

N° 9306

MODELES LINEAIRES A FACTEURS ET STRUCTURE A TERME DES TAUX D'INTERET

E. CLEMENT(*), C. GOURIEROUX(**) et A. MONFORT(***)

(*) CREST et Université PARIS IX

(**) CREST et CEPREMAP

(***) INSEE - Département de la Recherche

MODELES LINEAIRES A FACTEURS ET STRUCTURE A TERME DES TAUX D'INTERET

E. **CLEMENT** (*), **C. GOURIEROUX**(**) et **A. MONFORT**(***)

R E S U M E

Dans cet article, nous étudions le problème de la reconstitution de la structure à terme des taux à partir de l'observation d'obligations à revenus fixes. Nous commençons par introduire des modèles à facteurs pour décrire l'évolution des prix des zéro-coupons, et nous explicitons les contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage, selon la façon d'introduire les facteurs. La seconde partie de l'article est consacrée aux problèmes statistiques : identification, estimation des paramètres, test des contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage, valorisation d'actifs.

LINEAR FACTOR MODELS AND TERM STRUCTURE OF INTEREST RATE

E. **CLEMENT** (*), **C. GOURIEROUX**(**) et **A.MONFORT**(***)

A B S T R A C T

The aim of this paper is the determination of the term structure of interest rates from observations of the prices of fixed-income bonds. We first introduce factor models to describe the evolution of prices of zero-coupon bonds, and we derive the constraints induced by the arbitrage free condition. The second part of the paper is concerned with the statistical problems : identification, parameter estimation, test of the arbitrage free hypothesis, valuation of various financial assets.

MOTS CLES : Modèles à facteurs - Structure à terme des taux.
KEYWORDS : Factor models - Term structure of interest rates.
J.E.L. CLASSIFICATION : G12

I - INTRODUCTION

Les modèles décrivant la structure à terme des taux et les méthodes statistiques permettant de déterminer cette structure à partir de l'observation de titres à revenus fixes ont fait l'objet de très nombreuses publications, dont les principales sont données en référence. Toutes ces approches s'appuient sur les relations entre prix des titres à revenus fixes et prix des zéro-coupons découlant de l'absence d'opportunité d'arbitrage statique et sur des modèles d'évolution des prix des zéro-coupons. Elles diffèrent cependant de plusieurs façons :

(*) Elle peuvent être formulées en temps discret ou, beaucoup plus souvent, en temps continu. Les observations disponibles étant en temps discret, il est alors nécessaire de reconstituer la loi des prix des zéro-coupons discrets à partir de celle des prix des zéro-coupons continus. Sauf pour quelques modèles simples, cette reconstitution ne peut être menée que de façon approchée (modèle discrétisé ou simulations).

(**) Elles peuvent, par ailleurs, conduire à une définition directe ou indirecte de la loi des prix des zéro-coupons. Il est usuel, dans ce dernier cas, d'introduire des variables sous-jacentes, appelées facteurs, dont dépendent tous les prix des zéro-coupons [Litterman-Scheinkman (1988), Frachot-Jancy-Lacoste (1992), Heath-Jarrow-Morton (1992), El Karaoui-Lacoste (1992), El Karaoui-Cherif (1992), Duffie-Kan (1993)].

(***) Quel que soit le modèle retenu, la méthodologie statistique ne peut être appliquée que si le nombre de prix observables à la date t (disons n) est inférieur ou égal au nombre d'aléas indépendants (disons m) se produisant à cette même date et figurant dans le modèle. Cette condition admet une interprétation simple. Supposons qu'elle ne soit pas satisfaite, c'est-à-dire que $m < n$, alors le marché des titres observés serait complet et par condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, on en déduirait l'existence de relations déterministes entre prix observés, relations évidemment non satisfaites par les données disponibles.

Si nous notons H le nombre de zéro-coupons dont sont fonctions les titres observés à chaque date, K le nombre de facteurs, nous avons

généralement $m = \text{Min}(H,K)$. La condition $m \geq n$ peut alors être satisfaite soit avec $H > K$, soit avec $H \leq K$. Ces deux cas sont assez différents. Supposons (fictivement) ouverts les marchés des titres zéro-coupons. Si $H > K$, ces marchés sont complets et, appliquant l'absence d'opportunité d'arbitrage dynamique, on peut en déduire des liaisons entre les évolutions des prix des zéro-coupons. Si $H \leq K$, les marchés sont incomplets et aucune contrainte additionnelle ne s'introduit naturellement. Ceci montre que les méthodes d'analyse de la structure à terme des taux se distinguent aussi par leurs hypothèses concernant la complétude des marchés des zéro-coupons.

Dans cet article nous nous intéressons principalement à la détermination statistique de la structure à terme des taux. Dans cette optique appliquée, il paraît souhaitable de disposer de modèles en temps discret pour les prix des zéro-coupons. Un tel modèle, où chaque prix de zéro-coupon s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients prédéterminés de facteurs, est introduit dans le paragraphe II. Il est en effet préférable pour l'estimation d'introduire un modèle sur les prix des zéro-coupons et non sur les taux spot forwards [voir le paragraphe III et Vasicek-Fong (1982) pour un argument similaire]. Ce modèle peut être vu comme un analogue discret du modèle de Heath-Jarrow-Morton (1992). Il possède d'ailleurs des propriétés assez semblables ; en particulier lorsque le nombre de facteurs est petit, on peut facilement établir les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage, donner l'interprétation du modèle contraint, faire apparaître le prix du risque...et ceci avec des hypothèses sur les lois plus faibles que les hypothèses usuelles. Finalement nous particularisons ce modèle linéaire à facteurs au cas de coefficients fixes, ce qui conduit cependant à des modèles théoriques suffisamment souples pour permettre de bons ajustements[1].

---

[1] "It is a question of time until a sufficiently rich theoretical model is proposed that provides a good fit to the data. For the time being however empirical fitting of the term structure is very much an unrelated task to investigation of equilibrium bond markets" Vasicek-Fong (1982).

II.A - Description du modèle.

Nous nous plaçons en temps discret et nous notons $\mathfrak{I}_t$ l'information disponible à la date t. La suite de ces informations constitue une suite croissante de σ-algèbres.

$B(t,h)$, $t = 1,\ldots,T,\ldots$, $h = 0,1,\ldots,H$ désigne le prix en t d'un zéro-coupon délivrant une unité de monnaie en $t + h$. Les prix $B(t,h)$, h variant, sont $\mathfrak{I}_t$ mesurables, et $B(t,0) = 1$, $\forall\ t$.

Nous dirons qu'un modèle de prix de zéro-coupons est linéaire à facteurs, si :

$$(2.1) \qquad B(t,h) = a(t,h)' F_t + b(t,h), \quad t = 1,\ldots, \quad h=1,\ldots,H,$$

où (F_t) est un processus aléatoire du second ordre, de dimension K, $\mathfrak{I}_t$-mesurable, de loi conditionnelle non dégénérée [la matrice de variance-covariance de F_t conditionnelle à $\mathfrak{I}_{t-1}$ est inversible], où $a(t,h)$, $b(t,h)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives K et 1, supposés $\mathfrak{I}_{t-1}$-mesurables. Les composantes de F_t sont appelées facteurs.

Le modèle linéaire à facteurs peut être réécrit de façon vectorielle :

$$(2.2) \qquad B_t = A_t F_t + b_t,$$

avec $B_t = [B(t,1),\ldots,B(t,H)]'$,

$A_t = [a(t,1),\ldots,a(t,H)]'$,

$b_t = [b(t,1),\ldots,b(t,H)]'$.

Dans le modèle (2.2) nous n'avons fait figurer que les échéances h pour lesquelles la formulation à facteurs implique des contraintes effectives. Il est toujours possible d'ajouter au système l'échéance $h= 0$, puisque :

$$B(t,0) = 1 = 0 \cdot F_t + 1 \quad .$$

Par ailleurs lorsque l'ensemble des prix des zéro-coupons satisfait un modèle linéaire à facteurs, la décomposition faisant apparaître des facteurs n'est pas unique. Ainsi si les facteurs initiaux F_t ne sont pas conditionnellement centrés-réduits, et si nous notons $F_t^* = ({}_{t-1}V_t F)^{-1/2}(F_t - {}_{t-1}E_t F)$ le processus conditionnellement centré-réduit correspondant [avec ${}_{t-1}E_t F = E(F_t/\mathcal{F}_{t-1})$, ${}_{t-1}V_t F = V(F_t/\mathcal{F}_{t-1})$] , nous avons :

$$\begin{aligned} B_t &= A_t F_t + b_t \\ &= A_t \left[{}_{t-1}E_t F + ({}_{t-1}V_t F)^{1/2} F_t^* \right] + b_t \\ &= A_t ({}_{t-1}V_t F)^{1/2} F_t^* + A_t \, {}_{t-1}E_t F + b_t \ , \end{aligned}$$

(2.3) $$B_t = A_t^* F_t^* + b_t^* \quad \text{avec :} \quad {}_{t-1}E_t F^* = 0 \ , \ {}_{t-1}V_t F^* = Id \ .$$

Il est ainsi toujours possible de se ramener à un modèle à facteurs, où les F_t^* possèdent des propriétés de type bruit blanc sans corrélation instantanée. Même une telle décomposition n'est d'ailleurs pas unique, les facteurs F_t^* pouvant être remplacés par les facteurs $F_t^{**} = QF_t^*$, où Q est une matrice orthogonale quelconque.

Du point de vue de l'interprétation, il peut y avoir des différences importantes entre les diverses écritures des modèles à facteurs. Nous serons par exemple amenés dans la suite à considérer des représentations à coefficients déterministes :

(2.4) $$B_t = A_t F_t + b_t \quad , \text{ avec } A_t \ , \ b_t \text{ déterministes.}$$

Toute la dynamique des prix des zéro-coupons passe alors par l'intermédiaire des facteurs. Cependant après avoir conditionnellement centré et réduit, nous obtenons une version du modèle $B_t = A_t^* F_t^* + b_t^*$, où la liaison avec le passé transite essentiellement par l'intermédiaire des coefficients.

II.B - Absence d'opportunité d'arbitrage.

Lorsque $H > K+1$, il y a moins de facteurs (terme prédéterminé inclus) que de prix des zéro-coupons. Le marché des zéro-coupons est complet et, appliquant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, nous pourrons déduire des liaisons entre les dynamiques des divers $B(t,h)$, $h : 1,\ldots,H$.

Considérons un portefeuille (fictif) de titres zéro-coupons constitué à la date t . Les poids de chaque titre dans le portefeuille sont $\alpha_{t,h}$, $h = 1,\ldots,H$ et sont $\Im_t$-mesurables. Le prix à la date t de ce portefeuille est :

$$P_t = \alpha_t' B_t = \alpha_t' A_t F_t + \alpha_t' b_t \quad .$$

A la date $t+1$, il vaut :

$$P_{t+1} = \alpha_t' B^-_{t+1} \quad \text{avec} \quad B^-_{t+1} = [B(t+1,0),\ldots,B(t+1,H-1)]' \quad .$$

Si le portefeuille construit est sans risque à la date t son rendement doit être égal à celui de l'actif non risqué. Cette condition s'écrit

$$(2.5) \qquad \underset{t}{V} P_{t+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{1}{B(t,1)} \quad .$$

Détaillant cette implication, nous obtenons :

$$\begin{cases} \alpha_{2t}\, a(t+1,1) + \ldots + \alpha_{Ht}\, a(t+1,H-1) = 0 \\ \Rightarrow [\alpha_{2t}\, b(t+1,1) + \ldots + \alpha_{Ht}\, b(t+1,H-1)]\ B(t,1) \\ = \alpha_{2t}\, B(t,2) + \ldots + \alpha_{Ht}\, B(t,H) \quad . \end{cases}$$

Nous en déduisons l'existence d'un vecteur de multiplicateurs, de taille K, $\Im_t$-mesurable, noté λ_t tel que :

$$(2.6)\qquad \begin{bmatrix} B(t,2) - b(t+1,1)\,B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) - b(t+1,H-1)\,B(t,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'(t+1,1) \\ \vdots \\ a'(t+1,H-1) \end{bmatrix} \lambda_t \quad , \quad t = 1,\ldots,T.$$

Ce système induit $T(H-1-K)$ contraintes entre les variables aléatoires $B(t,h)$, $b(t,h)$, $a(t,h)$.

Ces contraintes permettent d'expliciter les termes $b(t,h)$ en fonction des sensibilités aux facteurs $a(t,h)$ et des multiplicateurs. En effet, nous avons :

$$b(t,h) = - \frac{a'(t,h)\lambda_{t-1}}{B(t-1,1)} + \frac{B(t-1,h+1)}{B(t-1,1)} \quad ,$$

d'où nous déduisons :

$$B(t,h) = a'(t,h) \left[F_t - \frac{\lambda_{t-1}}{B(t-1,1)} \right] + \frac{B(t-1,h+1)}{B(t-1,1)} \quad , \quad h = 1,\ldots,H-1 \quad .$$

Ainsi sous la contrainte d'absence d'opportunité d'arbitrage les prix des zéro-coupons sont parfaitement déterminés, une fois connus :

la structure de prix à une date initiale $B(0,h)$, $h = 1,\ldots, H$,
l'évolution des prix longs $(B(t,H)$, $t = 0,1,\ldots$
la suite des sensibilités $a(t,h)$,
et une suite de multiplicateurs λ_t .

II.C - Interprétation des multiplicateurs.

L'existence d'une relation de type (2.6) a été établie pour toute représentation à facteurs, et, lorsqu'une représentation à facteurs est remplacée par une représentation équivalente, il y a modification des multiplicateurs, et donc de leur interprétation. Considérons ainsi la transformation (2.2) , (2.3) consistant à centrer et réduire conditionnellement les facteurs. Nous avons :

$$a^{*\prime}(t,h) = a'(t,h)\,(V_{t-1} F_t)^{1/2} \quad ,$$

$$b^*(t,h) = b(t,h) + a'(t,h) \; {}_{t-1}E \; F_t$$

$$= b(t,h) + a^{*\prime}(t,h) \; (V_{t-1} F_t)^{-1/2} \; {}_{t-1}E \; F_t \quad .$$

La relation (2.6) est alors équivalente à :

$$(2.7) \qquad \begin{bmatrix} B(t+2) - b^*(t+1,1)\, B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) - b^*(t+1,H-1)\, B(t,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{*\prime}(t+1,1) \\ \vdots \\ a^{*\prime}(t+1,H-1) \end{bmatrix} \lambda_t^* \quad ,$$

avec $\lambda_t^* = (V_t F_{t+1})^{-1/2} (\lambda_t - E_t F_{t+1})$.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner une interprétation des multiplicateurs λ_t^* associés à des facteurs conditionnellement centrés réduits. Pour cela considérons un portefeuille construit à la date t, de poids connus à cette date. Nous avons :

$$P_{t+1} = \alpha_{1t} + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; B(t+1,h)$$

$$= \alpha_{1t} + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; b^*(t+1,h) + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; a^{*\prime}(t+1,h) \; F_t^* \quad .$$

Comme F_t^* est conditionnellement centré, réduit, nous en déduisons :

$$\begin{cases} E_t \; P_{t+1} = \alpha_{1t} + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; b^*(t+1,h), \\ V_t \; P_{t+1} = \left[\sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; a^{*\prime}(t+1,h)\right] \left[\sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; a^*(t+1,h)\right] \end{cases}$$

Par ailleurs le prix à la date t de ce titre est :

$$P_t = \alpha_{1t} B(t,1) + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; B(t,h+1) \quad ,$$

$$= \alpha_{1t} B(t,1) + \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; b^*(t+1,h) \; B(t,1)$$

$$+ \sum_{h=1}^{H-1} \alpha_{h+1,t} \; a^{*\prime}(t+1,h) \; \lambda_t^* \quad .$$

$$(2.8) \qquad P_t = B(t,1) \underset{t}{E} P_{t+1} + \Omega_t \lambda_t^* \quad , \text{ avec } \Omega_t \Omega_t' = \underset{t}{V} P_{t+1} \quad .$$

Sous cette forme, on voit que le prix actuel du titre est égal à l'espérance actualisée de son prix futur, affectée d'un terme correctif correspondant à un effet de volatilité. Ce dernier donne le prix du risque en décomposant celui-ci selon le prix du risque λ_{kt}^* de chacun des facteurs F_{kt}^* .

II.D - Représentations à facteurs à coefficients déterministes.

i) Représentations linéaires déterministes sur les zero-coupons.

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'expliciter les contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage (2.6), pour un modèle à coefficients a,b déterministes. Les multiplicateurs sont tels que :

$$B(t,h+1) - b(t+1,h) \; B(t,1) = a'(t+1,h) \; \lambda_t \quad , \qquad h = 1,\ldots,H-1 \quad ,$$

$$\Leftrightarrow \qquad a'(t,h+1) \; F_t + b(t,h+1) - b(t+1,h) \; [a'(t,1) \; F_t + b(t,1)]$$

$$= a'(t+1,h) \; \lambda_t \quad , \quad h = 1,\ldots,H-1 \quad .$$

La forme de ces équations satisfaites par le vecteur de multiplicateurs λ_t entraîne que ce dernier s'écrit nécessairement sous la forme :

(2.9) $\lambda_t = C_t F_t + d_t$,

où les matrices C_t et d_t , de tailles respectives (K,K) et (K,1) , sont déterministes.

Remplaçant λ_t par son expression dans l'équation d'absence d'opportunité d'arbitrage et identifiant les coefficients des facteurs (terme déterministe inclus), nous avons

(2.10)
$$\begin{cases} a'(t,h+1) - b(t+1,h)\, a'(t,1) = a'(t+1,h)\, C_t \ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h = 1,\ldots,H-1 \ . \\ b(t,h+1) - b(t+1,h)\, b(t,1) = a'(t+1,h)\, d_t \ , \end{cases}$$

ii) Cas de coefficients stationnaires.

Lorsque les coefficients déterministes A , b sont supposés stationnaires (A_t , b_t indépendants de t) , il en est nécessairement de même des coefficients C et d définissant les multiplicateurs, et le système (2.10) devient :

$$\begin{cases} a'(h+1) - b(h)\, a'(1) = a'(h)\, C \ , \\ b(h+1) - b(h)\, b(1) = a'(h)\, d \ , \end{cases}$$

(2.11)
$$\begin{pmatrix} a(h+1) \\ b(h+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C' & a(1) \\ d' & b(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix} \ , \quad h = 1,\ldots,H-1 \ .$$

Il s'agit d'une équation linéaire, qui fournit la forme des coefficients $\begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix}$, une fois donnés les coefficients initiaux $\begin{pmatrix} a(1) \\ b(1) \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire le modèle de taux court) et les coefficients C , d définissant les multiplicateurs. Ces coefficients pouvant être fixés de façon indépendante, on voit que le degré de liberté porte sur la matrice $M = \begin{bmatrix} C' & a(1) \\ d' & b(1) \end{bmatrix}$.

Nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} a(h+1) \\ \\ b(h+1) \end{pmatrix} = M^h \begin{pmatrix} a(1) \\ \\ b(1) \end{pmatrix} \quad , \qquad h = 1,\ldots,H-1 \quad ,$$

où de façon équivalente en notant que $a(0) = 0$, $b(0) = 1$ et en tenant compte de la forme de la matrice M :

$$(2.12) \qquad \begin{pmatrix} a(h) \\ \\ b(h) \end{pmatrix} = M^h \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad h = 0,\ldots,H \quad .$$

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Propriété 1 : Considérons un modèle linéaire à facteurs à coefficients constants :

$$B_t = A F_t + b \quad ,$$

les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage impliquent :

$$B(t,h) = (0,1) (M')^h \begin{pmatrix} F_t \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad h = 0, 1,\ldots., H \quad .$$

Il est important de noter que cette propriété est obtenue sous des hypothèsesfaibles concernant les facteurs F_t , essentiellement l'inversibilité de la matrice $_{t-1}V_1 F_t$.

Lorsque la matrice M' est diagonalisable et s'écrit :

$$M' = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{K+1} \end{pmatrix} Q \quad ,$$

où μ_k , $k = 1,\ldots,K+1$ désignent les valeurs propres, la condition peut être écrite :

$$B(t,h) = (0,1)\ Q^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1^h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{K+1}^h \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} F_t \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$(2.13) \qquad B(t,h) = \sum_{k=1}^{K+1} \mu_k^h \ \tilde{F}_{kt} ,$$

où $\tilde{F}_{kt}$ est la combinaison des facteurs obtenue en multipliant la k^e composante de $(0,1)Q^{-1}$ par la k^e composante de $Q \begin{pmatrix} F_t \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons que, comme $B(t,0) = 1$, $\forall\ t$, on a $\sum_{k=1}^{K+1} \tilde{F}_{kt} = 1$, $\forall\ t$.

Valeurs propres μ et facteurs $\tilde{F}$ peuvent éventuellement être à valeurs complexes, par exemple si certaines vagues apparaissent dans la structure des $B(t,h)$.

Ainsi les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage conduisent naturellement à des formulations par combinaisons (aléatoires) d'exponentielles [Voir Vasicek-Fong (1982), Shea (1985), Frachot (1992) pour l'utilisation de telles combinaisons déterministes]. Ces combinaisons s'introduisent naturellement sur les prix des zéro-coupons, mais n'apparaîtraient pas sur les taux spot-forward [voir Langetieg-Smoot (1981) par exemple pour l'application de splines aux taux]. De même on ne verra apparaître des combinaisons aléatoires de polynômes [voir Mc Cullogh (1975)], que si la matrice M' est non diagonalisable et admet 1 comme valeur propre multiple.

Finalement nous voyons que :

$$E_{t-1}\, B(t,h) = \sum_{k=1}^{K+1} \mu_k^h \; E_{t-1}\, (\tilde{\tilde{F}}_{kt}) \quad ,$$

$$\text{Cov}_{t-1}\, [B(t,h),B(t,\ell)] = (\mu_1^h,\ldots,\mu_{K+1}^h)\; V_{t-1}\; (\approx F_t)\; \begin{pmatrix} \mu_{\cdot 1}^{\ell} \\ \vdots \\ \mu_{K+1}^{\ell} \end{pmatrix} \quad .$$

Le modèle conduit à de l'hétéroscédasticité conditionnelle, si les facteurs sont conditionnellement hétéroscédastiques. Dans le cas où ils sont conditionnellement homoscédastiques, nous avons :

$$\text{Cov}_{t-1}\, [B(t,h),B(t,k)] = (\mu_1^h,\ldots,\mu_{K+1}^h)\; V \; \begin{pmatrix} \mu_{\cdot 1}^{\ell} \\ \vdots \\ \mu_{K+1}^{\ell} \end{pmatrix} \quad ,$$

où V est une matrice constante. Il subsiste, ce qui est peu pris en compte d'habitude, de l'hétéroscédasticité du prix du zéro-coupon en fonction du terme, et de la corrélation entre les prix des zéro-coupons des divers termes.

iii) Représentations linéaires déterministes sur les évolutions relatives des prix zéro-coupons.

D'autres hypothèses peuvent être faites sur les coefficients prédéterminés a(t,h) , b(t,h) intervenant dans la décomposition des prix des zéro-coupons. En particulier pour se rapprocher de la formulation à facteurs proposée par Heath-Jarrow-Morton (1992) dans un contexte de temps continu, il est intéressant d'introduire des modèles à facteurs à coefficients déterministes sur les évolutions de prix.

De tels modèles sont du type :

$$(2.14) \qquad B(t,h) = B(t-1,h)\; (a_h'\, F_t + b_h) \quad .$$

La condition (2.6) d'absence d'opportunité d'arbitrage s'écrit alors :

$$(2.15) \qquad B(t,h+1) - B(t,h)\; B(t,1)\; b_h = B(t,h)\; a_h'\, \lambda_t \quad , \; h = 1,\ldots,H-1 \; .$$

Dans l'annexe 1 nous établissons la propriété suivante pour les cas de un et deux facteurs.

Propriété 2 : On suppose que la loi de F_t conditionnelle à $\mathfrak{I}_{t-1}$ est une loi chargeant au moins $\mathbb{R}_+^K$. Alors la condition d'A.O.A. implique les modèles contraints suivants :

1) Si le nombre de facteurs est $K = 1$, le prix du zéro-coupon est de la forme :

$$B(t,h) = B(0,1)\, a_1^{t+h-1}\, \mu_0^{h-1}\, d^{t(h-1)+\frac{(h-1)(h-2)}{2}} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_\tau) \quad ,$$

où μ_0 , d sont des paramètres réels, et $\tilde{F}_t$ un facteur transformé du facteur initial par une translation.

2) Si le nombre de facteurs est $K = 2$, les prix des zéro-coupons sont de l'une des deux formes suivantes :

Première forme :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1\tau}) \quad , \\ \\ B(t,h) = B(0,2)\, q^{h-2}\, (\tilde{a})^{t(h-2)+\frac{(h-3)(h-2)}{2}} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2\tau}) \quad . \end{cases}$$

seconde forme :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2\tau}) \quad , \\ B(t,2p) = B(0,1)\, (\tilde{a})^{t(p-1)+(p-1)^2} q_2 (q_1 q_2)^{p-1} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2\tau}) \quad , \\ B(t,2p+1) = B(0,1)\, (\tilde{a})^{tp+p(p-1)} (q_1 q_2)^p \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1\tau}) \quad , \end{cases}$$

où $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ sont déduits des facteurs initiaux par une translation, $\tilde{a}$, q_1 , q_2 des paramètres réels.

Les facteurs transformés sont en fait définis par :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(t-1,1)\ \tilde{F}_{1t} , \\ \\ B(t,2) = B(t-1,2)\ \tilde{F}_{2t} , \end{cases}$$

et peuvent être vus comme engendrant les évolutions respectives des prix des zéro-coupons de termes 1 et 2 ; ils sont en général corrélés.

On note qu'une représentation linéaire à facteurs sur les évolutions relatives apparaît très contrainte, lorsqu'on prend en compte les restrictions d'A.O.A.. Seuls deux ou trois paramètres libres subsistent ainsi dans le cas de deux facteurs. Par ailleurs des formes différentes de structure à terme et d'effets de facteurs apparaissent avec l'augmentation du nombre de facteurs. En plus d'une première forme où la structure à un facteur réapparaît dès le second terme $h = 2$, on obtient une seconde forme faisant apparaître une "périodicité" de la structure à terme, de période égale à deux, c'est-à-dire au nombre de facteurs.

Les évolutions des prix des zéro-coupons peuvent être analysées, soit en fonction du temps, soit en fonction du terme. Considérons par exemple le cas d'un facteur. Nous avons :

$$\text{Log } B(t,h) = [\text{Log } B(0,1) + (h-1) \text{ Log } a_1]$$

$$+ \left[t(h-1) + \frac{(h-1)\ (h-2)}{2} \right] \text{Log } d + \sum_{\tau=1}^{t} \text{Log } (\tilde{F}_\tau) \ .$$

A terme fixé, il s'agit d'un modèle en logarithme comportant une partie déterministe avec tendance linéaire et une partie aléatoire, avec une composante de type marche aléatoire (si les variables $\tilde{F}_\tau$ sont

indépendantes de même loi). A date donnée, la structure à terme des logarithmes des prix est un polynôme de degré deux en h , dont seul le terme constant est aléatoire. De tels modèles où le prix du zéro-coupon a une forme exponentielle affine dans les facteurs sont par exemple considérés par Duffie-Kan (1993).

iv) Représentations linéaires déterministes sur les évolutions relatives des prix des zéros-coupons de même maturité.
Comme dernier exemple des contraintes induites par l'A.O.A., nous considérons la version modifiée du modèle (2.13) , où les deux zéro-coupons sont relatifs à la même maturité :

$$(2.16) \qquad B(t,h) = B(t-1,h+1)\,(a_h' F_t + b_h) \quad .$$

La condition (2.6) d'A.O.A. devient :

$$B(t,h+1) - B(t,h+1)\, b_h\, B(t,1) = B(t,h+1)\, a_h'\, \lambda_t \quad ,$$

$$\Leftrightarrow \quad (2.17) \qquad 1 - b_h\, B(t,1) = a_h'\, \lambda_t \quad .$$

Nous en déduisons par résolution que λ_t est nécessairement de la forme : $\lambda_t = c\, B(t,1) + d$.

Remplaçant dans l'équation (2.17) , nous obtenons :

$$\exists\ c,d \ :\ 1 - b_h\, B(t,1) = a_h'\, c\, B(t,1) + a_h'\, d \qquad \forall\ h,t$$

$$\Leftrightarrow \qquad (2.18) \qquad \begin{cases} - b_h = a_h'\, c \quad , \\ \\ 1 = a_h'\, d \quad ; \end{cases}$$

ainsi l'équation (2.16) se ramène à la forme contrainte :

$$(2.19) \qquad B(t,h) = B(t-1,h+1)\ a_h'(F_t - c)$$

où les vecteurs a_h sont contraints à appartenir à un hyperplan affine.

Sur un modèle à facteurs du type (2.16), les contraintes d'A.O.A. données par (2.18) sont linéaires et de ce fait seront facilement testables (voir le paragraphe III pour un exemple de test d'A.O.A.). L'A.O.A. apparaît ici assez peu contraignante. Il reste un grand nombre de paramètres et l'évolution des "prix longs" B(t,H) peut être spécifiée indépendamment des facteurs introduits.

Le modèle (2.16) contient comme cas particulier le modèle proposé par Ho et Lee (1986). Ce dernier modèle correspond à un schéma de type binominal défini par :

$$B(t,h) = \frac{B(t-1,h+1)}{B(t-1,1)} \; G_t(h) \quad ,$$

où $G_t(.)$ est une fonction aléatoire ne pouvant prendre que deux valeurs $g(.)$ et $g^*(.)$ telles que $0 \leq g^*(.) \leq 1 \leq g(.)$. Si nous introduisons la variable binaire ω_t telle que $\omega_t = 1$, si $G_t(.) = g(.)$, $\omega_t = 0$, si $G_t(.) = g^*(.)$, nous obtenons :

$$B(t,h) = \frac{B(t-1,h+1)}{B(t-1,1)} \; [g(h)\,\omega_t + g^*(h)\,(1-\omega_t)]$$

$$B(t,h) = B(t-1,h+1) \left\{ [g(h) - g^*(h)] \frac{\omega_t}{B(t-1,1)} + g^*(h) \frac{1}{B(t-1,1)} \right\} .$$

Il s'agit d'un modèle à deux facteurs, dont un prédéterminé, sans terme constant ($b_h = 0$) . La condition de liaison affine entre les coefficients $g(h) - g^*(h)$ et $g^*(h)$ est évidemment celle trouvée par Ho et Lee (1986).

Les quelques exemples de modèles à facteurs décrits en i), iii), iv) montrent que les conditions d'A.O.A. ont des impacts assez différents selon la façon dont ont été introduits les facteurs, aussi bien pour ce qui concerne le nombre de paramètres restant dans la formulation contrainte, que pour l'interprétation des évolutions compatibles avec l'A.O.A..

Il est donc important avant de poser et d'utiliser un modèle à facteurs de bien examiner la formulation contrainte associée. On conçoit même que dans des cas plus complexes où des facteurs seraient introduits d'une manière non linéaire, la formulation descriptive à facteurs initiale puisse se révéler incompatible avec l'A.O.A..

II.E - Titres d'arbitrage et titres facteurs.

i) Représentations à facteurs à coefficients déterministes.

Considérons une telle représentation :

$$B_t = A F_t + b = [A,b] \begin{pmatrix} F_t \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Tout portefeuille de poids α tels que :

$$\alpha' [A,b] = 0 \quad , \tag{2.20}$$

est de coût nul et de prix futur nul. Un tel portefeuille n'est autre qu'un portefeuille d'arbitrage. Lorsque nous tenons compte des contraintes d'A.O.A., cette condition d'orthogonalité peut prendre une forme plus simple. Ainsi plaçons-nous dans le cas où la matrice M est diagonale ; les prix des zéro-coupons satisfont :

$$B(t,h) = \sum_{k=1}^{K+1} \mu_k^h \, \tilde{\tilde{F}}_{kt} \quad .$$

Si nous introduisons Δ l'opérateur retard dans le terme h :

$$\Delta B(t,h) = B(t,h-1) \quad , \text{ nous avons :}$$

$$\left[\prod_{k=1}^{K+1} (1 - \mu_k \Delta) \right] B(t,h) = 0 \quad , \quad \forall \; h \geq K + 1 \quad , \tag{2.21}$$

et les portefeuilles correspondants aux membres de gauche de (2.21) constituent une base de l'ensemble des portefeuilles d'arbitrage.

De façon symétrique, nous pouvons résoudre par rapport aux facteurs la réprésentation initiale, ce qui permet de voir chacun des facteurs [constante incluse] comme un portefeuille. Considérons à titre d'exemple le cas $K = 1$ et supposons que l'on a deux valeurs propres réelles $\mu_1 > \mu_2$. Les facteurs peuvent être exprimés en fonction de deux prix des zéro-coupons de maturités différentes, choisies a priori de façon quelconque. Par analogie avec la pratique classique, nous retiendrons un prix court et un prix long :

$$\begin{cases} B(t,1) = \mu_1 \overset{\approx}{F}_{1t} + \mu_2 \overset{\approx}{F}_{2t} \\ B(t,H) = \mu_1^H \overset{\approx}{F}_{1t} + \mu_2^H \overset{\approx}{F}_{2t} \end{cases} .$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} \overset{\approx}{F}_{1t} = \dfrac{\mu_2^H B(t,1) - \mu_2 B(t,H)}{\mu_1\mu_2(\mu_2^{H-1} - \mu_1^{H-1})} \\ \overset{\approx}{F}_{2t} = \dfrac{-\mu_1^H B(t,1) + \mu_1 B(t,H)}{\mu_1\mu_2(\mu_2^{H-1} - \mu_1^{H-1})} \end{cases} .$$

Chaque prix zéro-coupon peut alors être exprimé à l'aide du prix court et du prix long.

$$(2.22) \quad B(t,h) = \frac{1}{\mu_1^{H-1} - \mu_2^{H-1}} \left\{ B(t,1) [\mu_2^{h-1}\mu_1^{H-1} - \mu_1^{h-1}\mu_2^{H-1}] + B(t,H) [\mu_2^{h-1} - \mu_1^{h-1}] \right\} .$$

III - ANALYSE STATISTIQUE DE LA STRUCTURE A TERME DES TAUX.

Une analyse de la structure des taux (ou des prix) doit résoudre

deux questions : comment prendre en compte les liens déterministes entre prix des titres à revenus fixes et prix des zéro-coupons ? Le modèle d'évolution du prix des zéros-coupons doit-il ou non imposer les contraintes provenant de l'absence d'opportunité d'arbitrage, alors que celles-ci ont été introduites en supposant fictivement ouverts les marchés des zéro-coupons ?

La pratique usuelle consiste à séparer la relation prix des titres-prix des zéro-coupons et la relation prix des zéro-coupons-facteurs. Ainsi on commence généralement par "estimer" des prix des zéro-coupons en effectuant une régression entre le prix des titres à revenus fixes et les flux de ces titres aux diverses dates ; le prix zéro-coupon est assimilé au coefficient de régression du flux correspondant. Cette approche, qui repose en pratique sur une formulation paramétrique déterministe du prix du zéro-coupon, semble avoir été initialement proposée dans Carleton et Cooper (1976).

Dans une deuxième étape on assimile ces "prix des zéro-coupons estimés" aux prix réels et on essaye d'ajuster un modèle, soit de façon entièrement descriptive, soit en prenant en compte les contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Dans ce paragraphe, nous proposons une démarche unifiée. Celle-ci ne sépare pas la relation titres-zéro-coupons et la relation zéro-coupons-facteurs, ce qui permet implicitement de prendre en compte dans la détermination de la structure à terme des taux, le remplacement des véritables prix inconnus des zéro-coupons par des approximations. De plus la méthode peut aussi bien s'appliquer dans un cadre descriptif que dans un cadre plus structurel, incluant des contraintes d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ceci conduit à un test de ces contraintes d'A.O.A. qui, rappelons-le, ne concernent pas des marchés réels, mais des marchés fictifs. Lorsque les contraintes d'A.O.A. sont rejetées, il est intéressant de détecter la ou les directions expliquant ce rejet, c'est-à-dire les marchés fictifs (mais qui peuvent s'ouvrir dans le futur) sur lesquels l'arbitrage serait profitable. Le but de ce paragraphe étant de présenter les grandes lignes de la démarche statistique et les différences entre cette démarche et celles utilisées habituellement, nous considérons le cas d'un modèle à facteurs linéaires sur les prix des zéro-coupons [voir II.D-ii)], avec un nombre de facteurs

supérieur au nombre d'obligations dont les prix sont observés, et une dynamique linéaire sur les facteurs.

III.A - Le modèle statistique.

Un modèle statistique spécifie la loi des variables observables, en fonction de certains paramètres, qui sont ensuite estimés et analysés. Les variables observables sont ici des prix d'obligations supposés observés à chaque date. On suppose pour simplifier que le nombre d'obligations observées est indépendant du temps, mais la démarche peut facilement être étendue au cas où ce nombre serait évolutif. Nous notons P_t , vecteur de taille n , ces prix observés. Chacune des obligations peut être vue comme un portefeuille de titres zéro-coupons, dont la composition est connue. Cette composition peut évidemment évoluer dans le temps ; ainsi pour une obligation donnée, l'ensemble des flux versés diminue lorsqu'on se rapproche de la maturité. Il résulte alors des conditions d'A.O.A. statique que P_t peut s'écrire :

$$(3.1) \qquad \underset{(n,1)}{P_t} = \underset{(n,H)}{\alpha_t} \; \underset{(H,1)}{B_t} \quad ,$$

où B_t est le vecteur des prix des zéro-coupons, α_t la matrice connue décrivant les flux. Cette relation linéaire déterministe exprime ainsi les variables observables P_t à l'aide des variables latentes B_t . Le modèle est alors complété en spécifiant l'évolution des prix des zéro-coupons.

Nous retenons pour ceux-ci un modèle linéaire à facteurs avec coefficients déterministes, modèle dans lequel nous ajoutons des termes d'erreur u_t :

$$(3.2) \qquad \underset{(H,1)}{B_t} = \underset{(H,K)}{A} \; \underset{(K,1)}{F_t} + \underset{(H,1)}{b} + \underset{(H,1)}{u_t} \quad .$$

Finalement nous supposons que :

(F_t) satisfait un modèle autorégressif d'ordre un :

$$(3.3) \qquad \underset{(K,1)}{F_t} = \underset{(K,K)}{\Phi} \; \underset{(K,1)}{F_{t-1}} + \underset{(K,1)}{v_t} \quad ,$$

et que :

Les termes d'erreur (u_t) , (v_t) sont des bruits blancs indépendants de matrice de variance-covariance respectives :

(3.4) $\quad V\ u_t = \Omega\ ,\ V\ v_t = \Sigma\ ,$

supposées inversibles.

Le modèle statistique global apparaît ainsi comme un modèle à trois étages, défini par (3.1)-(3.4) . Il s'agit à ce stade d'un modèle descriptif, n'incluant par exemple aucune idée d'arbitrage. Ainsi l'équation (3.2) permet simplement de distinguer des facteurs dynamiques (F_t) transportant toutes les corrélations temporelles, de facteurs instantanés u_t .

Comment intégrer dans ce modèle purement descriptif des relations d'A.O.A. dynamique ? Il est clair que d'un point de vue purement théorique, les équations (3.2) décrivant les prix des zéro-coupons comportent plus de facteurs (ici F_t , u_t) que de zéro-coupons, donc que le marché (fictif) des zéro-coupons n'est pas complet. Cependant d'un point de vue pratique si u , c'est-à-dire Ω , est petit, par rapport à l'effet des facteurs dynamiques, on peut considérer le cas limite $\Omega = 0$. Dans ce cas, il y aurait des contraintes dues à l'A.O.A., et qui, d'après (2.10) seraient de la forme :

(3.5) $\quad H_0 = \left\{ \exists\ c,d\ :\ a'(h+1) - b(h)\ a'(1) = a'(h)\ C\ ,\right.$

$$\left. b(h+1) - b(h)\ b(1) = a'(h)\ d \right\}\ .$$

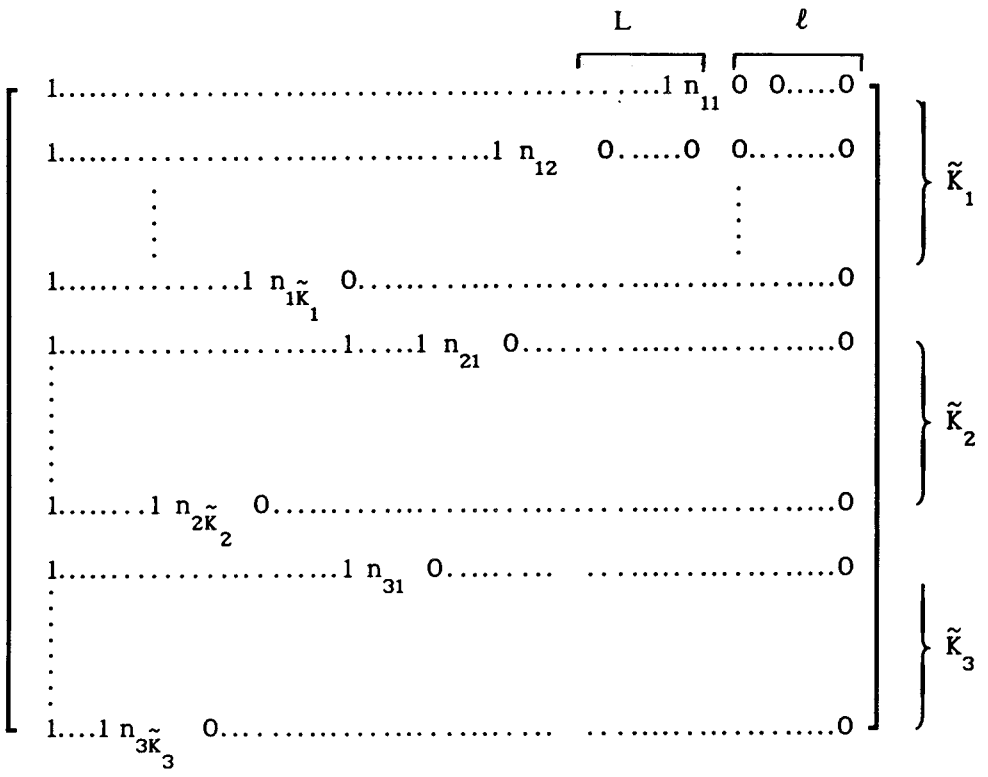
Ceci conduit naturellement à introduire le modèle (3.1)-(3.4) contraint par les conditions (3.5) , associées à l'A.O.A.. Le modèle contraint est évidemment un sous-modèle de la formulation descriptive initiale. Ceci permet dans la suite de considérer l'estimation de ces deux formulations, puis de comparer les résultats obtenus, c'est-à-dire de tester si les contraintes d'A.O.A.sur les marchés fictifs de zéro-coupons avec risque idiosyncratique mis à zéro sont ou non satisfaites.

III.B - Titres observés.

Les propriétés probabilistes du modèle précédent et les propriétés statistiques des estimateurs, qui seront proposés, dépendent beaucoup du type de titres dont les prix sont observés. Une première question à étudier est l'identification des paramètres d'intérêt caractérisant la dynamique (3.2) - (3.3) des prix des zéro-coupons, puisque ceux-ci ne sont observés qu'à travers les agrégats P_t .

Une autre difficulté vient de la non stationnarité possible du modèle, qui risque de modifier les propriétés d'estimateurs usuels du type maximum de vraisemblance. En effet même si les prix des zéro-coupons étaient stationnaires, des non stationnarités pourraient s'introduire à travers les coefficients α_t , qui décrivent les séquences de flux. Ainsi du point de vue pratique, on considère généralement des obligations assez classiques, avec des échéances à l'émission de 3 mois, 6 mois, 1 an, et émises de façon régulière. Cependant les prix de ces obligations ne sont pas systématiquement retenus, car l'équation d'A.O.A. statique (3.1) n'a de sens que si le marché est suffisamment concurrentiel à la date considérée ; il est de ce fait usuel de ne pas introduire certaines émissions lorsque la valeur du coupon conduit à avoir des demandeurs ayant des portefeuilles trop stables, à éliminer les dates où ont lieu peu d'échanges, celles proches des dates d'échéance,....

De façon à illustrer les difficultés liées à ce choix date par date des titres observés, nous allons introduire un schéma simple d'observation de titres et étudier ses implications sur le modèle statistique. Nous considérons des titres émis régulièrement, disons pour simplifier de L en L . A chacune de ces dates on émet des obligations à coupon fixe (fonction de la date d'émission) de plusieurs échéances $H_1 = K_1 L$, $H_2 = K_2 L$, $H_3 = K_3 L$, $K_1 > K_2 > K_3$. Finalement, on suppose que les prix de ces titres sont observés au début de leur vie, respectivement jusqu'aux dates $\tilde{H}_1 = \tilde{K}_1 L$, $\tilde{H}_2 = \tilde{K}_2 L$, $\tilde{H}_3 = \tilde{K}_3 L$. Plaçons-nous alors à une date t et notons $\ell \equiv t \bmod(L)$. La matrice α_t admet la structure suivante (obtenue en normalisant à 1 les divers coupons), où les $\tilde{K}_1$ premières lignes correspondent aux $\tilde{K}_1$ titres d'échéance $H_1 = K_1 L$, dont les prix sont observés....



Cette matrice est de taille $(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + \tilde{K}_3 \ , \ K_1 \ L)$. En pratique $\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + \tilde{K}_3 < K_1 \ L$, ce qui d'ailleurs évite l'existence des relations déterministes découlant de l'A.O.A. entre les composantes du prix P_t .

On notera que cette matrice dépend de la date de deux façons différentes : d'abord par l'intermédiaire de ℓ du fait du décalage des colonnes selon la date d'observation, puis aussi par l'intermédiaire des valeurs n_{ij} , rapport entre le nominal et le coupon, qui dépend naturellement des niveaux de taux au moment de l'émission. Pour notre illustration théorique, nous laisserons de côté ce problème d'endogénéité des coupons, ce qui revient à supposer que les coupons sont (à échéance donnée) fixés de façon indépendante des taux. La première cause de non stationnarité peut alors être étudiée. En effet la matrice α_t dépend uniquement de la valeur ℓ , et il suffit d'écrire le modèle en empilant les valeurs successives correspondant à la périodicité des observations pour retrouver un processus stationnaire. Mathématiquement ceci revient à introduire le vecteur élargi:

$$\tilde{P}_t = \begin{bmatrix} P_{(t-1)L+1} \\ \vdots \\ P_{tL} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \alpha_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{(t-1)L+1} \\ \vdots \\ B_{tL} \end{pmatrix} = \tilde{\alpha}\ \tilde{B}_t$$

et la dynamique correspondante du vecteur $\tilde{B}_t$ pour les dates t multiples de L . La matrice $\tilde{\alpha}$ est alors indépendante de la date t et de taille $[(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + \tilde{K}_3)\ L\ ,\ K_1 L^2]$. Cet exemple montre qu'on peut ainsi espérer utiliser les résultats asymptotiques usuels pour le processus des prix observés et surtout pour les estimateurs qui s'en déduiront.

La complexité du problème rend également difficile l'étude des conditions d'identification, et en pratique ces conditions pourront être détectées numériquement, à partir de la vitesse de convergence des algorithmes d'optimisation utilisés et de la qualité des estimateurs. On peut cependant faire deux remarques :

i) Une première cause de non identification provient de la définition des facteurs à une transformation linéaire inversible près. En effectuant de telles transformations on voit que la matrice Σ peut toujours être prise égale à la matrice idendité [transformer F_t en $\Sigma^{-1/2} F_t$], et qu'alors la matrice a peut être contrainte par $a_{hk} = 0$, si $h < k$ [effectuer une transformation orthogonale adéquate sur F_t] .

ii) Par ailleurs certains paramètres peuvent apparaître non identifiables à cause de l'agrégation des prix des zéro-coupons.

III.C - Estimation.

L'inférence statistique pour notre problème est tout à fait classique et nous ne ferons que décrire les grandes lignes de celle-ci, en renvoyant le lecteur à la littérature appropriée.

Le modèle descriptif (3.1)-(3.4) se présente sous la forme classique d'un modèle linéaire espace-état [voir par exemple Gouriéroux-Monfort (1990)]. Il est spécifié à travers les moments d'ordre deux :

$$E\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}}) = m_t(\theta) \quad ,$$

$$V\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}}) = \sum_t(\theta) \quad ,$$

où $E\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}})$ désigne la régression linéaire affine théorique de P_t sur les valeurs passées P_{t-1} , P_{t-2} ....

et

$$V\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}}) = E\left[[P_t - E\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}})]\ [P_t - E\ L\ (P_t / P_{\underline{t-1}})]'\right] \quad ,$$

la variance résiduelle correspondante. Ces moments diffèrent en général de l'espérance et de la variance conditionnelle, mais ils leur sont identiques, lorsque les prix sont conditionnellement normaux. Ces moments sont fonctions des valeurs passées $P_{\underline{t-1}}$ et des paramètres du modèle θ .

Θ désigne l'ensemble des paramètres apparaissant dans A , b , Φ , $\sum$, Ω une fois prises en compte les contraintes d'identification, et les diverses autres contraintes qu'il pouvait être intéressant d'introduire pour l'interprétation structurelle. On suppose dans la suite satisfaite la condition d'identifiabilité :

$$\left.\begin{array}{l} m_t(\theta) = m_t(\theta_0) \quad , \quad \forall\ t \\ \\ \sum_t(\theta) = \sum_t(\theta_0) \quad , \quad \forall\ t \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \theta_0 \quad .$$

Le paramètre θ peut alors être estimé par une méthode du pseudo-maximum de vraisemblance, associée à la loi normale, c'est-à-dire en cherchant la solution de :

$$(3.5) \qquad \text{Max} \quad \mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} L_t(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Log det } \sum_t(\theta) - \frac{1}{2} [P_t - m_t(\theta)]' \right.$$

$$\left. \sum_t(\theta)^{-1} [P_t - m_t(\theta)] \right\} \quad .$$

Cette optimisation conduit à un estimateur $\hat{\theta}_T$, qui sous des conditions de régularité classiques, incluant la condition de stationnarité discutée en III.B, est, pour T tendant vers l'infini, convergent, asymptotiquement normal. Notant θ_0 la vraie valeur des paramètres, la variance asymptotique de l'estimateur est [voir e.g. Gallant-White (1988)] :

$$(3.6) \qquad V_{as}\left[\sqrt{T}\ (\hat{\theta}_T - \theta_0)\right] = J(\theta_0)^{-1}\ I(\theta_0)\ J(\theta_0)^{-1} \quad ,$$

$$\text{avec} = \begin{cases} J(\theta_0) = E_{\theta_0}\left(-\dfrac{\partial^2 L_t(\theta_0)}{\partial\theta\ \partial\theta'}\right) \quad , \\ I(\theta_0) = \sum_h E_{\theta_0}\left(\dfrac{\partial L_t(\theta_0)}{\partial\theta}\dfrac{\partial L_{t-h}(\theta_0)}{\partial\theta'}\right) \quad . \end{cases}$$

La résolution du problème (3.5) et la détermination de la précision estimée doivent être effectuées numériquement et sont facilitées par l'utilisation de l'algorithme de Kalman [voir Gouriéroux-Monfort (1990)]. La démarche précédente s'applique aussi bien pour le modèle initial non contraint par l'A.O.A. , que pour le modèle contraint par l'hypothèse H_0 d'absence d'opportunité d'arbitrage.

III.D - Test de l'hypothèse H_0.

Appliquant la démarche précédente, on dispose de deux estimateurs, contraint $\hat{\theta}_T^0$ et non contraint $\hat{\theta}_T$ du paramètre θ . Comparer les valeurs de ces paramètres peut servir de base à une procédure de test de l'hypothèse H_0 d'absence d'opportunité d'arbitrage (à erreurs mises à zéro). On pourrait par exemple dans le cas conditionnellement gaussien construire la statistique d'Hausman-Wald :

$$(3.7) \qquad \xi_H = (\hat{\theta}_T - \hat{\theta}_T^0)'\ [\hat{V}\ (\hat{\theta}_T) - \hat{V}\ (\hat{\theta}_T^0)]^+\ (\hat{\theta}_T - \hat{\theta}_T^0) \quad ,$$

où $\hat{V}$ désigne la variance estimée de l'estimateur et $+$ l'inverse généralisée. Cette statistique suit sous l'hypothèse nulle une loi du

khi-deux avec un nombre r de degrés de liberté égal au rang de $V(\hat{\theta}_T) - V(\hat{\theta}_T^0)$. On décide alors

$$\begin{cases} \text{d'accepter l'hypothèse } H_0 \text{ , si } \xi_\omega < \chi^2_{95\%}(r) \text{ ,} \\ \text{de la refuser sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas non nécessairement conditionnellement gaussien, cette approche classique et automatique peut être remplacée par une démarche en deux étapes, utilisant la forme mixte de la contrainte définissant H_0 . L'idée est la suivante [Szroeter (1983), Gouriéroux-Monfort (1989)].

i) On commence par estimer par pseudo-maximum de vraisemblance les paramètres sans tenir compte de la contrainte H_0 . Ceci fournit des estimateurs $\hat{a}(h)$, $\hat{b}(h)$.

ii) On remplace alors les contraintes définissant H_0 par les contraintes approchées :

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \hat{a}'(h+1) - \hat{b}(h)\,\hat{a}'(1) = \hat{a}'(h)\,c + v_h \text{ ,} \\ \hat{b}'(h+1) - \hat{b}(h)\,\hat{b}(1) = \hat{a}'(h)\,d + w_h \text{ .} \end{cases} \qquad h = 1,\ldots,H \text{ ,}$$

On applique sur ce système de régressions empilées une méthode des moindres carrés ordinaires. Ceci fournit des estimateurs convergents $\hat{c}$, $\hat{d}$ des paramètres auxiliaires c et d .

iii) On calcule alors la véritable matrice de variance-covariance asymptotique des termes d'erreur :

$$V\left(\sqrt{T}\begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix}\right) = V\left(\sqrt{T}\begin{bmatrix} \hat{a}'(h+1) - \hat{b}(h)\,\hat{a}'(1) - \hat{a}'(h)\,c \\ \hat{b}(h+1) - \hat{b}(h)\,\hat{b}'(1) - \hat{a}'(h)\,d \end{bmatrix}\right) = \Lambda \text{ ,}$$

qui dépend des paramètres θ et de c et d . On l'estime alors en remplaçant chaque terme par son estimateur convergent, en particulier c

et d par $\hat{c}$ et $\hat{d}$.

iv) Finalement, on réestime le système linéaire (3.8) par une méthode des moindres carrés quasi-généralisés avec $\hat{\Lambda}$ comme matrice de variance-covariance des erreurs. On obtient de nouveaux estimateurs plus précis $\hat{\hat{c}}$, $\hat{\hat{d}}$ de c et d . Surtout T fois la valeur à l'optimum de la fonction minimisée dans ce dernier problème suit asymptotiquement une loi du χ^2 à r degrés de liberté et est, sous l'hypothèse de normalité conditionnelles, asymptotiquement équivalente à la statistique d'Hausman-Wald et peut donc servir de base aux tests.

Il faut insister sur l'intérêt principal de cette démarche en plusieurs étapes. Un test d'Hausman-Wald est global et lorsque l'hypothèse nulle est rejetée, il est difficile en général de savoir facilement quelle en est la raison. Dans l'approche en deux étapes, on sait que la valeur à l'optimum de la fonction objectif est directement liée à une somme (normalisée) de carrés de résidus $\hat{v}_h$, $\hat{w}_h$. Lorsque l'hypothèse est rejetée, cette somme est trop grande et la méthode en deux étapes donne comme sous-produits les valeurs des résidus $\hat{v}_h$, $\hat{w}_h$. Elle permet donc de détecter les termes h qui expliquent le rejet, c'est-à-dire ceux pour lesquels il y aurait opportunité d'arbitrage [si u valait zéro].

III.E - Valorisation.

Le filtre de Kalman, utile pour déterminer les estimateurs, peut aussi être employé dans une optique de prévision, soit de variables latentes correspondant à la période d'observation, notée 1,...,T , [ici ce rôle est joué par les facteurs F_t et par les prix des zéro-coupons B(t,h)], soit de variables correspondant à des dates futures. Dans le premier cas on parle de filtrage ou de lissage et dans le second de prévision. Ainsi on peut déterminer numériquement $E\ L\ [F_t / \underline{P_T}]$, $E\ L\ [B(t,h) / \underline{P_T})$, $\forall$ t=1,...,T, T+1, ... et les erreurs de prévision linéaire correspondantes :

$V\ L\ [F_t / \underline{P_T}]$, $V\ L \left[\begin{bmatrix} B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) \end{bmatrix} / \underline{P_T} \right]$. A cause de la présence dans

le modèle du terme u_t , la matrice $V\,L\left[\begin{bmatrix} B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) \end{bmatrix} / \underline{P_T}\right]$ est généralement inversible, et la structure des prix, c'est-à-dire la suite B(t,1)...B(t,H) est prévue avec erreur. Les méthodes précédentes peuvent être utilisées pour valoriser une autre obligation à revenu fixe. Considérons par exemple une telle obligation de flux $\alpha^*_{t1} \ldots \alpha^*_{tH}$. Son prix $P^*_t = \sum_{h=1}^{H} \alpha^*_{th}\ B(t,h)$ est alors évalué par le prix lissé :

$$E\,L\,[P^*_t/\underline{P_T}] = \sum_{h=1}^{H} \alpha^*_{th}\ E\,L\,[B(t,h)/\underline{P_T}]$$

$$= \alpha^{*\prime}_t\ E\,L\left[\begin{bmatrix} B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) \end{bmatrix} / \underline{P_T}\right] ,$$

et l'erreur correspondante est :

$$V\,L\,[P^*_t/\underline{P_T}] = \alpha^{*\prime}_t\ V\,L\left[\begin{bmatrix} B(t,1) \\ \vdots \\ B(t,H) \end{bmatrix} / \underline{P_T}\right] \alpha^*_t \quad .$$

Si les diverses erreurs u_t , v_t ,... du modèle (3.1) - (3.4) étaient normales, on aurait alors un intervalle de lissage à 95 % pour ce prix en prenant :

$$\left\{ E\,L\left[P^*_t/\ \underline{P_T}\right] \pm\ 2\ V\,L\left[P^*_t/\ \underline{P_T}\right]^{1/2} \right\} \quad .$$

Si cette obligation existe effectivement sur le marché et si son prix observé est $P^*_{t,obs}$, il sera naturel de placer ce prix par rapport à l'intervalle ainsi construit, le fait qu'il soit très en dehors de l'intervalle indiquant des opportunités d'arbitrage fortement probables.

IV - CONCLUSION

L'approche développée dans les chapitres précédents repose sur la modélisation directe de la dynamique des prix de titres élémentaires, ici les zéro-coupons. Ces titres élémentaires étant non nécessairement observables, il faut alors retrouver leur dynamique à partir de l'observation de certains portefeuilles de titres élémentaires, ici des obligations à revenu fixe.

Le même type de démarche peut être utilisé pour la valorisation de titres plus complexes. Ainsi dans Clément-Gouriéroux-Monfort (1993) nous considérons des titres, dont les flux de revenus sont fonctions des valeurs prises par un indice. Chacun de ces titres apparaît comme un portefeuille dans les titres élémentaires, que sont les actifs contingents rapportant un flux d'un franc à un terme donné, pour une évolution donnée de l'indice. On peut de manière analogue se donner, la forme de la dynamique des mesures de prix d'actifs contingents élémentaires, puis l'estimer à partir de l'observation de quelques portefeuilles et se servir de cette estimation pour résoudre des problèmes de valorisation.

ANNEXE 1

REPRESENTATIONS LINEAIRES DETERMINISTES SUR LES EVOLUTIONS RELATIVES.

i) Forme du coefficient b.

Des équations (2.13) et (2.14) , nous déduisons :

$$B(t-1,h+1)\ (a'_{h+1}\ F_t + b_{h+1})$$

$$- B(t-1,h)\ B(t-1,1)\ [a'_h\ F_t + b_h]\ [a'_1\ F_t + b_1]\ b_h$$

$$= B(t-1,h)\ [a'_h\ F_t + b_h]\ a'_h\ \lambda_t \quad .$$

Les hypothèses sur la loi de F_t permettent de faire tendre une composante F_{kt} vers l'infini en laissant les autres fixées. Nous avons alors en ne prenant que les termes d'ordre maximal :

$$B(t-1,h)\ B(t-1,1)\ a_{1k} a_{hk} b_h \simeq - B(t-1,h)\ a_{hk}\ a'_h\ \lambda_t \quad ,$$

$$B(t-1,1)\ a_{1k} b_h \simeq - a'_h\ \lambda_t \quad , \qquad \text{si } F_{kt} \to \infty \quad .$$

Nous en déduisons immédiatement l'existence d'un vecteur constant c tel que $b_h = a'_h\ c$.

Ceci montre que le modèle à facteurs est nécessairement de la forme :

$$(1) \qquad B(t,h) = B(t-1,h)\ a'_h\ (F_t + c) \quad .$$

La condition d'A.O.A. devient alors :

$$\exists\ \lambda_t : B(t,h+1) - B(t,h)\ B(t,1)\ a'_h\ c = B(t,h)\ a'_h\ \lambda_t \quad , \quad h \geq 1$$

$$\exists\ \lambda_t : B(t,h+1) = B(t,h)\ a'_h\ [\lambda_t + B(t,1)\ c] \quad ,$$

$$(2) \qquad \exists\ \mu_t : B(t,h+1) = B(t,h)\ a'_h\ \mu_t \quad , \quad h \geq 1 \quad .$$

ii) Lien entre μ_t et $F_t \pm c$

Des équations (1) et (2), nous déduisons deux façons de calculer B(t+1,h+1) :

$$B(t+1,h+1) = B(t,h+1)\, a'_{h+1}(F_{t+1} + c)$$

$$= B(t,h)\, a'_h\, \mu_t\, a'_{h+1}(F_{t+1} + c) \quad ,$$

et

$$B(t+1,h+1) = B(t+1,h)\, a'_h\, \mu_{t+1}$$

$$= B(t,h)\, a'_h(F_{t+1} + c)\, a'_h\, \mu_{t+1} \quad .$$

D'où la relation :

$$(3) \qquad a'_h\, \mu_t\, a'_{h+1}(F_{t+1} + c) = a'_h\,(F_{t+1} + c)\, a'_h\, \mu_{t+1} \quad , \qquad h \geq 1 \quad .$$

iii) Résolution dans le cas $K \equiv 1$.

Sous la condition d'A.O.A., le prix du zéro-coupon ne peut être nul et donc a_h et $\tilde{F}_t = F_t + c$ sont forcément non nuls.

La relation (3) devient alors :

$$\mu_t\, a_{h+1} = a_h\, \mu_{t+1} \quad , \qquad \forall\ h \geq 1 \quad , \quad \forall\ t \geq 0 \quad ,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mu_{t+1}}{\mu_t} = \frac{a_{h+1}}{a_h} \qquad \forall\ h \geq 1 \quad , \quad \forall\ t \geq 0 \quad .$$

Ce rapport est une constante. Nous la notons d . Nous avons donc :

$$a_h = d^{h-1}\, a_1 \quad ,$$

$$\mu_t = d^t\, \mu_0 \quad .$$

Nous en déduisons que :

$$B(t,h) = B(t-1,h)\ d^{h-1}\ a_1\ \tilde{F}_t$$

$$= B(0,h)\ a_1^t\ d^{(h-1)t} \prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_\tau \qquad \forall\ h \geq 1\ ,\ \forall\ t \geq 1\ .$$

Cette contrainte est uniquement déduite de l'équation (3) . Nous allons maintenant tenir compte de l'équation (2) . Nous avons :

$$\frac{B(t,h+1)}{B(t,h)} = a_h\ \mu_t\ ,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{B(0,h+1)}{B(0,h)}\ d^t = d^{h-1}\ a_1\ d^t\ \mu_0\ ,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{B(0,h+1)}{B(0,h)} = a_1\ \mu_0\ d^{h-1}\ .$$

Nous en déduisons que :

$$B(0,h) = B(0,1)\ (a_1\ \mu_0)^{h-1}\ d^{\frac{(h-1)(h-2)}{2}}\ ,$$

$$\text{et} \quad B(t,h) = B(0,1)\ a_1^t\ (a_1\ \mu_0)^{h-1}\ d^{(h-1)t+\frac{(h-1)(h-2)}{2}} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_\tau)\ .$$

iv) Forme explicite des contraintes dans le cas général.

Avec la notation $\tilde{F}_t = F_t + c$, les conditions (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} B(t,h) = B(t-1,h)\ a_h'\ \tilde{F}_t\ , \\ \\ B(t,h+1) = B(t,h)\ a_h'\ \mu_t\ , \end{cases}$$

ce qui entraîne :

(3) $\quad a'_h \mu_t a'_{h+1} \tilde{F}_{t+1} = a'_h \tilde{F}_{t+1} a'_h \mu_{t+1} \quad , \quad \forall \ h \geq 1 \quad .$

Supposons que les K facteurs aient été sélectionnés de façon à avoir un nombre minimal de facteurs. Les suites $(a_{h,1}),\ldots,(a_{h,K})$ sont alors linéairement indépendantes. Nous supposons que la matrice $\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_K \end{pmatrix}$ est inversible. Les facteurs étant définis à une transformation linéaire inversible près, on peut toujours supposer que $\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_K \end{pmatrix} = Id$. Nous raisonnons dans la suite avec ce choix. La condition (3) écrite pour h = 1,...,K devient :

$$\begin{cases} \mu_{1t} \tilde{F}_{2,t+1} = \mu_{1,t+1} \tilde{F}_{1,t+1} \quad , \\ \mu_{2t} \tilde{F}_{3,t+1} = \mu_{2,t+1} \tilde{F}_{2,t+1} \quad , \\ \qquad \vdots \\ \mu_{K-1,t} \tilde{F}_{K,t+1} = \mu_{K-1,t+1} \tilde{F}_{K-1,t+1} \quad , \\ \mu_{K,t} (a_{K+1,1} \tilde{F}_{1,t+1} + \ldots + a_{K+1,K} \tilde{F}_{K,t+1}) = \mu_{K,t+1} \tilde{F}_{K,t+1} \quad . \end{cases}$$

Posons : $G_{1,t+1} = \dfrac{\tilde{F}_{1,t+1}}{\tilde{F}_{K,t+1}} \quad , \quad \ldots\ldots, \quad G_{K-1,t+1} = \dfrac{\tilde{F}_{K-1,t+1}}{\tilde{F}_{K,t+1}} \quad ,$

ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_{1,t+1} = \mu_{1,t} \dfrac{G_{2,t+1}}{G_{1,t+1}} \quad , \ \ldots \ , \ \mu_{K-1,t+1} = \mu_{K-1,t} \dfrac{1}{G_{K-1,t+1}} \quad , \\ \mu_{K,t+1} = \mu_{K,t} (a_{K+1,1} G_{1,t+1} + \ldots + a_{K+1,K-1} G_{K-1,t+1} + a_{K+1,K}) \quad . \end{cases}$$

Remplaçant dans la condition (3) , nous obtenons :

$$a'_h \mu_t (a_{h+1,1} G_{1,t+1} + \ldots + a_{h+1,K-1} G_{K-1,t+1} + a_{h+1,K})$$

$$= (a_{h,1} G_{1,t+1} + \ldots + a_{h,K-1} G_{K-1,t+1} + a_{h,K})$$

$$\left\{ a_{h,1} \mu_{1,t} \frac{G_{2,t+1}}{G_{1,t+1}} + \ldots + a_{h,K-1} \mu_{K-1,t} \frac{1}{G_{K-1,t+1}} \right.$$

$$\left. + a_{h,K} \mu_{K,t} (a_{K+1,1} G_{1,t+1} + \ldots + a_{K+1,K-1} G_{K-1,t+1} + a_{K+1,K}) \right\} .$$

Conditionnellement à l'information disponible à la date t , les variables $G_{1,t+1}$, ..., $G_{K-1,t+1}$ peuvent varier dans tout $\mathbb{R}_+^K$ ce qui nous permet d'identifier les coefficients des fonctions, fonctionnellement indépendantes, de ces variables.

v) Forme explicite des contraintes pour $K = 2$.

Nous en déduisons les contraintes ci-dessous qui, pour simplifier, sont données pour $K = 2$:

coefficient de $G^2_{1,t+1}$:

(1*) $a_{h,1} a_{h,2} a_{3,1} \mu_{2,t} = 0$;

coefficient de $1/ G_{1,t+1}$:

(2*) $a_{h,1} a_{h,2} \mu_{1,t} = 0$;

coefficient de $G_{1,t+1}$:

(3*) $a'_h \mu_t a_{h+1,1} = a_{h,2} \mu_{2,t} (a_{h,2} a_{3,1} + a_{h,1} a_{3,2})$;

coefficient constant :

(4*) $\quad a_h' \mu_t a_{h+1,2} = a_{h,1}^2 \mu_{1,t} + a_{h,2}^2 \mu_{2,t} a_{3,2}$.

Ces équations doivent être satisfaites $\forall$ h, t .

Il faut aussi noter avant de commencer la résolution que $a_{h,1} \mu_{1,t}$ et $a_{h,2} \mu_{2,t}$ ne peuvent être simultanément nuls. En effet dans le cas contraire, on aurait : $B(t,h) = 0$, ce qui n'est pas compatible avec l'A.O.A..

vi) Résolution pour le cas $K = 2$.

a) Nous déduisons de la condition (2*) que s'il existe un indice h tel que $a_{h,1} a_{h,2} \neq 0$, nécessairement $\mu_{1,t} = 0$, $\forall$ t . Ceci nous permet de séparer la discussion.

b) 1er cas :

Il existe un indice h_0 tel que $a_{h_0,1} a_{h_0,2} \neq 0$ et $\mu_{1t} = 0$ $\forall$ t .

On a nécessairement $a_{h,2} \mu_{2,t} \neq 0$ $\forall$ h,t ; on déduit alors de l'équation (1*), écrite pour $h = 3$, que $a_{3,1} = 0$. Les équations restantes deviennent, après simplification par $a_{h,2}\mu_{2,t}$:

(3*) $\quad a_{h+1,1} = a_{h,1} a_{3,2}$,

(4*) $\quad a_{h+1,2} = a_{h,2} a_{3,2}$.

Les suites $(a_{h,1})$ et $(a_{h,2})$ sont proportionnelles. Ceci n'est pas compatible avec l'hypothèse que le nombre minimal de facteurs est deux. Donc ce premier cas ne peut exister sous la condition d'A.O.A..

c) 2ème cas : $a_{h,1} a_{h,2} = 0$, $\forall$ h .

Comme ces deux coefficients ne peuvent être nuls simultanément, on peut partitionner les termes en :

$$\mathfrak{H}_1 = \{ h : a_{h,1} = 0 \quad , \quad a_{h,2} \neq 0 \} ,$$

$$\mathfrak{H}_2 = \{ h : a_{h,1} \neq 0 \quad , \quad a_{h,2} = 0 \} .$$

Les conditions (3*) et (4*) deviennent, après simplifications :

$$\begin{cases} (3^*) \quad a_{h+1,1} = a_{h,2}\, a_{3,1} \\ \\ (4^*) \quad a_{h+1,2} = a_{h,2}\, a_{3,2} \end{cases} \quad , \quad \text{si} \quad h \in \mathfrak{Z}_1 \quad .$$

$$\begin{cases} (3^*) \quad a_{h+1,1} = 0 \\ \\ (4^*) \quad a_{h+1,2} = a_{h,1} \end{cases} \quad , \quad \text{si} \quad h \in \mathfrak{Z}_2 \quad .$$

Comme $a_{3,1} a_{3,2} = 0$, nous devons encore distinguer deux possibilités :

1) Si $a_{3,1} = 0$ [et $a_{3,2} \neq 0$] , $h = 3$ appartient à $\mathfrak{Z}_1$ et appliquant la première récurrence, on voit que :

$$\begin{cases} a_{h,1} = 0 \quad , \quad \forall \ h \geq 2 \quad , & \text{(puisque } a_{21} = 0) \\ \\ a_{h,2} = (a_{3,2})^{h-2} \quad , \quad \forall \ h \geq 2 & \text{(puisque } a_{22} = 1) \quad . \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(t-1,1)\ \tilde{F}_{1,t} \quad , \quad \forall \ t \quad , \\ \\ B(t,h) = B(t-1,h)\ (a_{3,2})^{h-2}\ \tilde{F}_{2,t} \quad , \quad \forall \ h \geq 2 \quad , \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) , \\ B(t,h) = B(0,h) (a_{3,2})^{t(h-2)} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2,\tau}) , \quad \forall \ h \geq 2 . \end{cases}$$

Les formes précédentes déduites de l'équation (3) n'utilisent pas toutes les restrictions provenant de l'A.O.A.. Nous allons maintenant vérifier que la prise en compte de la restriction (2) contraint la structure à terme de la date 0 . Nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{B(t,2)}{B(t,1)} = \mu_{1,t} = \dfrac{B(0,2)}{B(0,1)} \dfrac{\prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2,\tau})}{\prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau})} , \\ \dfrac{B(t,h+1)}{B(t,h)} = \dfrac{B(0,h+1)}{B(0,h)} (a_{3,2})^{t} = (a_{3,2})^{h-2} \mu_{2,t} , \text{ si } h \geq 2 . \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$\dfrac{B(0,h+1)}{B(0,h)} = q (a_{3,2})^{h-2}$, pour $h \geq 2$, où q est une constante,

d'où : $B(0,h) = B(0,2) \ q^{h-2} \ (a_{3,2})^{\frac{(h-3)(h-2)}{2}}$.

Finalement, nous obtenons la forme des prix des zéro-coupons :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) , \\ B(t,h) = B(0,2) \ q^{h-2} \ (a_{3,2})^{t(h-2)+\frac{(h-3)(h-2)}{2}} \left(\prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_{2,\tau} \right), \text{si } h \geq 2 . \end{cases}$$

2) Si $a_{32} = 0$ (et $a_{31} \neq 0$) , $h = 3$ appartient à $\mathfrak{I}_2$.

Les deux systèmes d'équations de récurrence deviennent :

$$\begin{cases} (3^*) \quad a_{h+1,1} = a_{h,2}\, a_{3,1} \\ \\ (4^*) \quad a_{h+1,2} = 0 \end{cases} \quad , \text{ si } h \in \mathfrak{I}_1 \ ,$$

$$\begin{cases} (3^*) \quad a_{h+1,1} = 0 \\ \\ (4^*) \quad a_{h+1,2} = a_{h,1} \end{cases} \quad , \text{ si } h \in \mathfrak{I}_2$$

On voit ainsi qu'alternativement h appartient à $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$. On a : si $h \in \mathfrak{I}_2$, $h+1 \in \mathfrak{I}_1$, $h+2 \in \mathfrak{I}_2$ ...
et $a_{h+2,2} = a_{h,2}\, a_{3,1}$.

D'où $$\begin{cases} a_{2p,2} = (a_{3,1})^{p-1} \ , \quad a_{2p+1,2} = 0 \ , \\ \\ a_{2p,1} = 0 \ , \quad a_{2p+1,1} = (a_{3,1})^{p} \ . \end{cases}$$

Nous pouvons alors en déduire les évolutions des prix des zéro-coupons.

Remplaçant dans l'équation (1) , nous obtenons :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(t-1,1)\ \tilde{F}_{1,t} \ , \\ \\ B(t,2p) = B(t-1,2p)\ (a_{3,1})^{p-1}\ \tilde{F}_{2,t} \ , \\ \\ B(t,2p+1) = B(t-1,2p+1)\ (a_{3,1})^{p}\ \tilde{F}_{1,\tau} \ , \end{cases}$$

puis par résolution :

$$\begin{cases} B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) \ , \\ B(t,2p) = B(0,2p)\ (a_{3,1})^{t(p-1)} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2,\tau}) \ , \\ B(t,2p+1) = B(0,2p+1)\ (a_{3,1})^{tp} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) \ . \end{cases}$$

Finalement prenons en compte la relation (2) . Nous avons :

$$\frac{B(t,2p+1)}{B(t,2p)} = \frac{B(0,2p+1)}{B(0,2p)}\ (a_{3,1})^{t}\ \frac{\prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_{1,\tau}}{\prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_{2,\tau}} = (a_{3,1})^{p-1}\ \mu_{2,t} \quad ;$$

donc il existe q_1 tel que :

$$\frac{B(0,2p+1)}{B(0,2p)} = q_1\ a_{3,1}^{(p-1)} \ .$$

$$\frac{B(t,2p)}{B(t,2p-1)} = \frac{B(0,2p)}{B(0,2p-1)}\ \frac{\prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_{2,\tau}}{\prod_{\tau=1}^{t} \tilde{F}_{1,\tau}} = a_{3,1}^{(p-1)}\ \mu_{1,t} \quad ;$$

donc il existe q_2 tel que :

$$\frac{B(0,2p)}{B(0,2p-1)} = (a_{3,1})^{p-1}\ q_2 \ .$$

D'où :

$$\begin{cases} B(0,2p+1) = B(0,1)\ a_{3,1}^{p(p-1)}\ (q_1 q_2)^{p} \ , \\ B(0,2p) = B(0,1)\ (a_{3,1})^{(p-1)^2}\ q_2\ (q_1 q_2)^{p-1} \ . \end{cases}$$

L'expression générale du prix du zéro-coupon s'en déduit immédiatement :

$$
\begin{cases}
B(t,1) = B(0,1) \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) \ , \\
B(t,2p) = B(0,1) \, (a_{3,1})^{t(p-1)+(p-1)^2} \, q_2 \, (q_1 q_2)^{p-1} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{2,\tau}) \ , \\
B(t,2p+1) = B(0,1) \, (a_{3,1})^{tp+p(p-1)} \, (q_1 q_2)^{p} \prod_{\tau=1}^{t} (\tilde{F}_{1,\tau}) \ .
\end{cases}
$$

R E F E R E N C E S

ARTZNER, P., et F. **DELBAEN** (1989) : "Term Structure of Interest Rates : The Martingale Approach", *Advances in Applied Mathematics*, 10, 95-129.

BALL, C., et W., **TOROUS** (1983) : "Bond Price Dynamics and Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 517-531.

BIERWAG, G., et M., **GROVE** (1967) : "A Model of the Term Structure of Interest Rates", *Review of Economics and Statistic*, 49, 50-62.

BLACK, F., **DERMAN**, E., et W., **TOY** (1990) : "A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, 33-39.

BRENNAN, M.J., et E.S., **SCHWARTZ** (1977) : "Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds", *Journal of Financial Economics*, 67-88.

BRENNAN, M.J., et E.S., **SCHWARTZ** (1979) : "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, 135-155.

BRENNAN, M.J., et E.S., **SCHWARTZ** (1980) : "Conditional Predictions of Bond Prices and Returns", *Journal of Finance*, May, 405-417.

BRENNAN, M.J., et E.S., **SCHWARTZ** (1982) : "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17.

CARLETON, W., et I., **COOPER** (1976) : "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, Vol. 31, 1067-1083.

CARLETON, W., **CHAMBERS**, ., et ., **WALDMAN** (1976) : "A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 233-252.

CHEN, R., et L., **SCOTT** (1992) : "Pricing Interest Rate Options in a Two Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure", *Review of Financial Studies*, 5, 613-636.

CLEMENT, E., **GOURIEROUX**, C., et A., **MONFORT** (1993) : "Prévision de Mesures de Prix Contingents", *CEPREMAP D.P.*.

COX, J., **INGERSOLL**, J.E., et S.A., **ROSS** (1981) : "A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 36, 769-799.

COX, J., **INGERSOLL**, J.E., et S.A., **ROSS** (1985) : "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 385-407.

CULBERTSON, J.M. (1957) : "The Term Structure of Interest Rates", *Quarterly Journal of Economics*, 71, 485-517.

DE BANDT, J. (1988) : "La courbe des taux d'intérêt en France", Banque de France.

DE LA BRUSLERIE, ., et . **GELLUSEAU** (1987) : "Mise en Evidence Empirique de la Structure à Terme des Taux d'Intérêt", *Finance*, 8.

DOBSON, S., **SUCHT**, R., et D., **VANDERFORD** (1976) : "An Evaluation of Alternative Empirical Models of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 1035-1065.

DOTHAN, L.U. (1978) : "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6, 59-69.

DUFFIE, D., et R., **KAN** (1993) : "A Yield Factor Model of Interest Rates", Stanford Univ..

EL KARAOUI, N., et T., **CHERIF** (1992) : "Modèle d'Evolution de la Courbe des Taux", *Caisse Autonome de Refinancement.*

EL KARAOUI, N., et V., **LACOSTE** (1992) : "Multifactor Models of the Term Structure of Interest Rates", AFFI.

EL KARAOUI, N., **LEPAGE**, C., **MYNENI**, R., **ROSEAU**, N. et R., **VISWANATHAN** (1991) : "The Valuation and Hedging of Contingent Claims with Markovian Interest Rates", DP.

FITOUSSI, J.P.,et ., **SIKORAV** (1990) : "Courbe de Taux et Zéro-Coupons", Crédit Commercial de France.

FRACHOT, A. (1992) : "Mathématiques Financières Théoriques", Chapitre II, miméo.

FRACHOT, A., **JANCI**, D., et V., **LACOSTE** (1992) : "Factor Analysis of the Term Structure : A Probabilistic Approach", DP. Banque de France.

GALLANT, A.R., et H. **WHITE** (1988) : "*A Unified Theory of Estimation and Inference for Non linear Dynamic Models*", Basil-Blackwell.

GOURIEROUX, C., et A., **MONFORT** (1989) : "A General Framework for Testing a Null Hypothesis in a Mixed Form", *Econometric Theory.*

GOURIEROUX, C., et A., **MONFORT** (1990) : *Séries Temporelles et Modèles Dynamiques*, Economica, Paris.

HEATH, D., **JARROW**, R. et A., **MORTON** (1990) : "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 419-490.

HEATH, D., **JARROW**, R. et A., **MORTON** (1992) : "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claim Valuation", *Econometrica*, 60, 77-106.

HO, T.S., et S., **LEE** (1986) : "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, 1011-1028.

HOGAN, M. (1992) : "Problems in Certain Two Factor Model", Citibank D.P., à paraître dans *Annals of Applied Probability*.

JAMSHIDIAN, F. (1989a) : "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, 1, 205-209.

JAMSHIDIAN, F. (1989b) : "*The Multifactor Gaussian Interest Rate Model and Implementation*", Fuji Bank, Londres.

LANGETIEG, T.C. (1980) : "A Multivariate Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 35, 71-97.

LITTERMAN, R., et J., **SCHEINKMAN** (1988) : "Common Factors Affecting Bond Returns", Goldman-Sachs : Financial Strategies Group, Technical Report 62.

LONG, J. (1974) : "Stock Prices, Inflation, and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 1, 131-170.

LONGSTAFF, F., et E., **SCHWARTZ** (1992) : "Interest Rate Volability and the Term Structure : A Two Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47, 1259-1282.

MALKIEL, B. (1962) : "Expectations, Bond Prices and the Term Structure of Interest Rates", *Quarterly Journal of Economics*, 197-218.

Mc CULLOCH, H. (1971) : "Measuring the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Business*, , 19-31.

Mc CULLOCH, H. (1975) : "The Tax Adjusted Yield Curves", *Journal of Finance*, 30, 811-830.

MEISELMAN, D. (1962) : *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice Hall.

MERTON, R.C. (1973) : "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-232.

MODIGLIANI, F., et R.J., **SHILLER** (1973) : "Inflation, Rational Expectations and the Term Structure of Interest Rates, *Economica*, 40, 12-43.

NELSON, C.R. (1972) : *The Term Structure of Interest Rates*, Basic Books, New York.

NEWEY, W., et K., **WEST** (1987) : "A Simple Positive Definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, 55, 703-708.

PYE, G. (1966) : "A Markov Model of the Term Structure", *Quarterly Journal of Economics*, 25, 60-72.

RICHARD, S. (1978) "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 33-57.

SANDMANN, K., et D., **SONDERMANN** (1989) : "A Term Structure Model and the Pricing of Interest Rate Options", DP B 129, Bonn Univ..

SHEA, G. (1985) : "Interest Rate Term Structure with Exponential Splines : A Note", *Journal of Finance*, 40, 319-325.

SHILLER, R.J. (1979) : "The Volatility of Long-Term Interest Rates and Expectations Models of the Term Structure", *Journal of Political Economy*, Vol. 87, 1190-1219.

SZROETER, J. (1983) : "Generalized Wald Methods for Testing Non linear Implicit and Overidentifying Restrictions", *Econometrica*, 51, 335-348.

VAN HORNE, J.C. (1965) : "Interest Rate Risk and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Political Economy*, 73, 344-351.

VASICEK, O. (1977) : "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

VASICEK, O., et ., **FONG** (1982) : "Term Structure Modeling Using Exponential Splines", *Journal of Finance*, 37, 339-348.