

Juillet 1992
Révisée Octobre 1992

QUELQUES IDEES SIMPLES
POUR LA SIMULATION STOCHASTIQUE
DES MODELES NON-LINEAIRES
A ANTICIPATIONS RATIONNELLES
ET METHODES DE VALIDATION
R. BOUCEKKINE (CEPREMAP-CREST)

N° 9215

**Quelques idées simples pour la simulation stochastique
des modèles non-linéaires à anticipations rationnelles
et méthodes de validation¹**

Raouf BOUCEKKINE²

RESUME :

On applique à un modèle de croissance à coûts d'ajustement une méthode de simulation stochastique, extension de la méthode déterministe de Laffargue [1990] et analogue, dans son esprit, à la technique utilisée par Gagnon [1990]. On étudie d'abord la différence de précision entre les règles de décision déduites par Gagnon et celles qu'on obtient puis on montre clairement leur supériorité aux méthodes de linéarisation. On examine ensuite la question du choix de l'horizon de simulation en relation avec les caractéristiques du processus stochastique d'entrée et trois méthodes de validation, économiques et statistiques, sont alors discutées. Cela nous permet en fin de compte de construire un cadre expérimental alliant précision des calculs et aspects de rigueur.

Mots-clés : Techniques numériques, anticipation rationnelle, coûts d'ajustement.

Codes J.E.L : 214, 021, 022.

**A simple stochastic simulation framework
for nonlinear rational expectation models**

ABSTRACT :

We apply on a simple growth model with adjustment costs a stochastic simulation method, based on the deterministic Laffargue's algorithm [1990] and using a numerical strategy analogous to Gagnon's framework [1990]. First, we compare the precision of the decision rules obtained by each of the two algorithms, and we prove clearly their superiority relatively to the linearization scheme. Then, we study the implications of the simulation time horizons choices regarding to the properties of the stochastic entries, and some statistical and economical validation methods are discussed.

Keywords : Computational techniques, rational expectations, adjustment costs.
J.E.L codes : 214, 021, 022.

¹ Je suis très reconnaissant à Pierre Malgrange, à Jean-Pascal Benassy et à Jean-Pierre Laffargue pour leurs commentaires sur les versions précédentes de cet article. Le programme général de la méthode de simulation qui est présentée est disponible.

² CEPREMAP et CREST-ENSAE

Introduction :

L'utilisation de la simulation stochastique pour les modèles économiques non-linéaires est motivée par le fait que les solutions déterministes ne sont pas égales aux moyennes des distributions des variables endogènes, que l'on cherche à déterminer. Afin de remédier à cette insuffisance de la solution déterministe, on a recours à l'expérimentation stochastique. La méthode de simulation stochastique usuelle, dite de Monte Carlo, peut être schématisée de la façon suivante :

Estimation > Génération de chocs aléatoires > Simulation par choc

CADRE MATHEMATIQUE DE LA PREDICTION

Après une étape d'estimation sous hypothèse de normalité des aléas, on construit des générateurs stochastiques, qui sont en général des lois normales dont la matrice de variance-covariance est formée à partir des résidus des équations estimées à l'étape précédente. Pour chaque tirage dans le générateur construit, le modèle étudié est résolu de façon déterministe, ce qui permet, en multipliant les tirages, d'engendrer des distributions pour les variables d'intérêt. Sur la base d'une théorie asymptotique appropriée, on forme alors les prédicteurs des quantités qu'on veut estimer, par exemples des moyennes des variables endogènes.

L'introduction de l'hypothèse d'anticipation rationnelle dans les modèles macroéconomiques a eu pour conséquence, parmi d'autres, de remettre en question ce type d'expérimentation. La raison en est simple : l'anticipation rationnelle implique qu'à tout instant, l'incertitude porte sur tout le futur alors

que pour les modèles dynamiques sans anticipations rationnelles, l'incertitude porte sur un nombre fini d'aléas par période. Alors qu'il est possible pour ces derniers modèles de générer "tous" les états de l'économie, par des tirages ponctuels des aléas dans leur loi, cela n'est guère envisageable en présence d'anticipation rationnelle. Les premières tentatives algorithmiques (Hall et Henry [1986] et Fair [1984]), visant à établir des techniques de simulation stochastique spécifiques aux modèles non-linéaires à anticipations rationnelles, comme simples extensions du schéma précédent ont connu un échec patent. Dès lors, la recherche dans ce domaine s'est orientée vers d'autres directions.

Afin de mieux exposer les options actuelles, considérons le modèle univarié suivant : $y_t = E_{t-1}\{f(y_{t-1}, y_{t+1}, x_t)\}$ pour $t \geq 1$ où y_t est la variable endogène du modèle, x_t la variable exogène et la notation $E_t[.]$ pour l'espérance conditionnelle à l'ensemble d'information à la date t . On suppose que l'incertitude est localisée dans la variable exogène, x_t : plus précisément, nous supposons que x_t est la seule innovation du modèle à la date t . **L'hypothèse d'anticipation rationnelle se traduit par le fait que y_t ne dépend pas seulement de la réalisation de x_t mais de toute la séquence des exogènes (x_{t+k}) pour $k > 0$.**

Une direction de recherche, largement prépondérante ces dernières années, surmonte le problème du futur incertain inhérent à l'hypothèse d'anticipation rationnelle en résolvant le modèle à **anticipations stationnaires** : en supposant que les exogènes suivent un processus stationnaire, on cherche à établir pour la variable endogène une règle de décision **indépendante du temps** ayant pour arguments un ensemble de variables d'état bien choisi. Nous prenons ici y_{t-1} et x_t comme variables d'état, ce qui correspond au choix naturel dans de nombreux modèles. La résolution à anticipations stationnaires peut recevoir des traitements divers (Cf. Boucekkine [1992]):

- Une première option consiste à se ramener à un cadre linéaire-quadratique où prévaut la propriété d'équivalence-certitude. La règle de décision pour y_t est alors linéaire en les variables d'état.
- Une seconde option consiste à raisonner à aléa moyen : cela revient à fixer toutes les exogènes futures (x_{t+k}) avec $k \geq 1$ à la moyenne du processus stochastique stationnaire donnant l'évolution de l'exogène, x_t . On remplace ainsi l'hypothèse d'anticipation rationnelle par une hypothèse d'anticipation parfaite. Le mode de solution adéquat est alors le mode déterministe.
- On peut aussi recourir au calcul intégral : en omettant sans ambiguïté l'indice du temps puisqu'on cherche des règles de décision indépendantes du temps et en supposant que la variable exogène suit un processus stationnaire de Markov d'ordre un, de fonction de répartition conditionnelle $F(x_{+1}/x)$, la règle de décision pour y , que l'on peut écrire $y=D(x, y_{-1})$, est obtenue en résolvant l'équation intégrale :

$$D(x, y_{-1}) = \int f(y_{-1}, D(x_{+1}, D(x, y_{-1})), x) dF(x_{+1}/x).$$

La résolution numérique ne peut se faire sans discrétisation des variables d'état; sur la forme discrète du problème, on mène alors des itérations du type Gauss-Seidel afin de déduire les décisions $D(x, y_{-1})$, ainsi que le suggère la forme de l'équation intégrale précédente³. Ce type de calculs est effectué par exemple par Coleman [1990], Tauchen [1986] et Tauchen et Hussey [1991].

- Une autre technique envisagée par Den Haan et Marcet [1990] consiste à paramétrer l'espérance conditionnelle apparaissant dans notre modèle par un polynôme de degré suffisamment élevé ayant pour arguments les variables d'état choisies. Numériquement, les coefficients du polynôme sont déterminés

³ Comme le suggère aussi l'équation intégrale donnée, les techniques numériques d'interpolation-extrapolation peuvent s'avérer nécessaires pour mener à bien les calculs.

à la convergence d'un processus d'apprentissage par moindres carrés non-linéaires, ce qui se traduit par une suite de régressions non-linéaires des termes apparaissant à l'intérieur des espérances conditionnelles, ici les termes $f(y_{t-1}, y_{t+1}, x_t)$, sur les formes polynômiales sélectionnées⁴.

De nombreuses autres techniques ont été avancées dans le cadre de cette approche, on peut en avoir un aperçu dans un numéro spécial du Journal of Business and Economic Statistics (Numéro 8, 1990).

La comparaison des performances de ces méthodes **sur le modèle de Ramsey, effectuée par le NBER Modelling Group en 1990** et dont on peut avoir quelques éléments dans Taylor et Uhlig [1990], mettent en évidence d'abord des différences statistiques notables entre les distributions générées par ces techniques de simulation. Par exemple, d'une méthode à une autre, on peut retrouver pour certaines mesures de volatilité des ordres de grandeur complètement différents.

Cela n'est pas étonnant outre mesure car comme cela apparaît dans les paragraphes précédents, chaque méthode est construite suivant une logique qui lui est propre : linéarisation pour certaines, calcul intégral pour d'autres, processus d'apprentissage par moindres carrés pour la méthode de Den Haan et Marcet, hypothèse d'anticipation parfaite pour les méthodes à aléa moyen...

On est ainsi conduit à s'interroger sur la construction de critères de discrimination entre toutes ces options numériques. Les critères de discrimination les plus rigoureux ne peuvent être que d'ordre statistique ou économétrique. C'est dans cet esprit, que Den Haan et Marcet [1989] ont proposé une statistique, appelée m-statistique, **dont le but est de tester la propriété de différence de martingale des résidus des équations d'Euler**. La discrimination

⁴ Nous n'aborderons pas ici la question de la convergence d'un tel processus d'apprentissage.

sur la base de cette statistique permet effectivement de réduire le champs de choix pour de nombreuses paramétrisations du modèle de Ramsey : n'y résistent globalement que les méthodes de Marcet et Den Haan et de Coleman⁶. En particulier, **dans les conditions expérimentales retenues par Taylor et Uhlig**, les méthodes de simulation dites à "aléa moyen" - c'est à dire substituant à l'hypothèse d'anticipation rationnelle, une hypothèse d'anticipation parfaite et donc à ce titre, simples extensions des méthodes déterministes - sont montrées généralement insuffisantes : par exemple, les échantillons générés par l'algorithme déterministe de Fair et Taylor [1983], tel qu'appliqué par Gagnon [1990], ne passe le test de la m-statistique que pour trois paramétrisations du modèle de Ramsey.

Le résultat de Taylor et Uhlig recoupe le fait simple suivant : les méthodes les plus "exactes" dans leur traitement des espérances conditionnelles apparaissant dans les équations d'Euler, sont les plus à même de générer des échantillons satisfaisant à posteriori à l'hypothèse d'anticipation rationnelle, ce qui est tout à fait recevable. Pour autant, si l'on tient compte de l'impossibilité numérique d'appliquer les méthodes rigoureuses précédentes au sens de la m-statistique dès que l'ensemble des variables d'état dépasse quatre ou cinq variables⁷ comme notre exposé sur les méthodes de calcul intégral le montre clairement, on est confronté à un véritable dilemme, faisabilité pour les modèles de grande taille / rigueur. De notre point de vue, **la meilleure stratégie face à ce dilemme est de retenir les méthodes de simulation :**

⁶ La méthode de Sims [1990] satisfait par construction au test de la m-statistique; néanmoins, l'approche particulière qui y est utilisée, dite du "backward-mapping", exige des justifications théoriques précises (voir Ingram [1990]), difficilement démontrables sur des modèles à structure stochastique plus compliquée que celle du modèle de Ramsey.

⁷ A l'exception de la méthode de Den Haan et Marcet dont le coût numérique n'augmente pas exponentiellement avec le nombre de variables d'état. Elle peut être ainsi appliquée à des modèles faiblement non-linéaires de dimension intermédiaire mais reste très peu opérationnelle pour les modèles ayant quelques dizaines de variables d'état et / ou de fortes non-linéarités.

taille /rigueur. De notre point de vue, la meilleure stratégie face à ce dilemme est de retenir les méthodes de simulation :

- i) qui restent applicables même pour les modèles de grandes taille.
- ii) dont on peut choisir les paramètres expérimentaux de façon à satisfaire aux exigences de rigueur.

Les méthodes de simulation à "aléa moyen" satisfont naturellement au premier principe de notre stratégie, en l'occurrence un domaine d'application qui n'est limité que par les capacités informatiques disponibles. Les méthodes de linéarisation satisfont aussi à ce premier principe mais elles ne peuvent en aucun cas satisfaire au second principe de rigueur pour la simple raison qu'on ne peut atteindre avec ces méthodes **une précision arbitraire**. Il nous reste donc à donner aux techniques de simulation à "aléa moyen" un cadre méthodologique cohérent qui présente de bonnes garanties de rigueur. Cela passe obligatoirement par **une analyse de leur biais potentiel** : en plus du biais dû au calcul numérique, les méthodes de simulation à "aléa moyen" pâtissent comme nous l'avons dit et comme nous le montrerons formellement, de la substitution d'une hypothèse d'anticipation parfaite à l'hypothèse originelle d'anticipation rationnelle, biais que saisit par exemple la m-statistique. **Il s'agit donc de bien maîtriser ces deux sources de biais; la première est localisée dans l'algorithme déterministe sous-jacent et nous montrons que la seconde est fortement liée aux paramètres de l'expérimentation stochastique.** Pour satisfaire au premier principe de notre stratégie, il nous faut choisir une méthode déterministe dont on peut contrôler facilement la précision : nous avons choisi dans ce but la méthode de Laffargue [1990] et nous verrons plus loin ces avantages comparatifs par rapport à l'algorithme de Fair-Taylor. Il nous faut aussi choisir les paramètres de l'expérimentation stochastique qui nous permettent, par exemple, de satisfaire plus facilement au test de la m-

modèle de croissance endogène à la Ramsey avec coûts d'ajustement pour le capital, ce qui nous permet, en particulier, de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Gagnon [1990] et Taylor et Uhlig [1990] sur le même type de modèle. Nous montrons ensuite l'infériorité de deux méthodes de linéarisation du point de vue de la précision du calcul. **Les résultats précédents montreront ainsi que notre méthode permet de maîtriser dans les meilleures conditions le biais dû au calcul numérique.** Nous abordons ensuite la question de la rigueur du procédé utilisé, nous distinguons pour cela des méthodes de validation purement économiques, où nous étudions l'impact des coûts d'ajustement sur le capital par le calcul des volatilités et des fonctions de réponse, et une méthode de validation statistique où nous montrons que **pour certains choix des paramètres d'expérimentation stochastique que nous interprétons en relation avec le constat de faible non-linéarité locale des modèles économiques,** on satisfait largement au test de la m-statistique.

1) La méthode :

On considère le modèle formel suivant :

$$E_t \{ f(y_t^2, y_{t+1}^1, y_{t-1}^1, x_t; \theta) \} = 0 \text{ pour } t \geq 1$$

où :

- y_{t+1}^2 est le vecteur des variables endogènes non-prédéterminées sous leur forme anticipée.

- y_{t-1}^1 est le vecteur des variables endogènes prédéterminées sous leur forme retardée.

- $y_t = [y_t^2 \ y_t^1]'$ est la concaténation verticale dans cet ordre du vecteur des endogènes non-prédéterminées sous leur forme courante et du vecteur des variables prédéterminées sous leur forme courante⁷.
- x_t est le vecteur des exogènes.
- θ est le vecteur des paramètres.

Ce codage correspond exactement à celui de Laffargue [1990]. $f(.)$ est une fonction vectorielle bien dimensionnée et $E_t\{.\}$ est l'opérateur d'espérance mathématique conditionnellement à l'ensemble d'information à la date t .

Avec la structure de notre modèle, représentative de la structure temporelle de la plupart des équations d'Euler apparaissant dans les modèles économiques, le vecteur "naturel" des variables d'état V_t est $[y_{t-1}^1, x_t]'$. On cherche alors la règle de décision D , indépendante du temps et telle que : $y_t = D(V_t)$ quelque soit t . On va considérer que le vecteur x_t suit un processus stochastique de mémoire finie, par exemple que x_t suit un processus autorégressif d'ordre p donné, soit : $x_t = \Phi(L) x_{t-1} + \varepsilon_t$ avec L l'opérateur "retard", $\Phi(.)$ un polynôme de degré $p-1$ vérifiant $\Phi(1) \neq 0$ pour la stationnarité, ε_t est un processus stationnaire, suivant une loi de distribution de moyenne nulle que nous notons Λ .

La méthode de simulation se déroule alors suivant les étapes suivantes :

- On fixe t et on se donne les conditions initiales (x_{t-j}) avec $j=1,..,p$, et une valeur pour y_{t-1}^1 . On tire alors ε_t dans la loi Λ , ce qui permet d'identifier alors le vecteur des variables d'état V_t . On fait aussi l'hypothèse cruciale : $\varepsilon_{t+i} = 0$, pour $i > 1$. Ce qui permet du coup de définir toute la séquence des variables exogènes futures.

⁷ Nous supposons sans perte de généralité qu'il n'y a pas de variables statiques.

Cette hypothèse revient donc à supposer que les anticipations sont parfaites. En conséquence, on remplace le problème stochastique⁸ par un problème déterministe, d'où un biais dû aux non-linéarités du modèle, la solution déterministe ne correspondant pas à l'espérance conditionnelle en présence de non-linéarités.

- On résoud alors le modèle par une méthode déterministe, l'algorithme de Laffargue pour notre part, d'où on déduit la valeur de y_t correspondante. Ce qui détermine du coup la valeur de la fonction de transfert $D(.)$ en le point V_t déterminé par le tirage.

Pour engendrer des séries temporelles artificielles, on replique le schéma précédent en initialisant dans chaque réplique $(x_{t-j})_j$ et y_{t-1} en utilisant les résultats de la réplique précédente.

Telle que pratiquée par Gagnon, outre l'erreur commise à cause de l'hypothèse sous-jacente d'anticipation parfaite, et l'erreur inhérente au calcul numérique, l'utilisation de la méthode de Fair-Taylor comme technique de résolution déterministe de l'algorithme présente par rapport à l'utilisation de la méthode de Laffargue deux inconvénients non-négligeables :

- Principalement, le temps de calcul requis beaucoup plus important. Cela est dû au fait que l'algorithme de Fair-Taylor, s'appuie sur trois types d'itérations de Gauss-Seidel : une première boucle résout le modèle à anticipations fixes, une seconde actualise les anticipations et une dernière, cruciale, sert à déterminer l'horizon de simulation. L'algorithme de Laffargue utilisant une seule boucle d'itérations de Newton-Raphson est nettement plus rapide⁹. Cet

⁸ Qui s'interprète par le fait que l'espérance conditionnelle apparaissant dans l'équation d'Euler est une intégrale basée sur la densité de distribution de tous les aléas futurs.

⁹ Et de convergence plus robuste aux variations des paramètres à conditions expérimentales égales, comme le montre Boucekkine [1992-b].

aspect revêt toute son importance dès lors que les simulations stochastiques, par construction, requièrent un volume de calculs très important.

- De plus, l'erreur faite sur la condition terminale par le troisième type d'itérations peut dans certains cas s'avérer non-négligeable et fausser les règles de décision déduites. Dans l'algorithme de Laffargue, l'horizon de simulation est fixé suivant un critère de proximité aux valeurs de long terme du modèle traité, ce qui est mathématiquement plus rigoureux.

Un point expérimental reste néanmoins très important, le choix de l'horizon de simulation déterministe au cours des répliques.

Pour que notre méthode soit indiscutablement préférable en temps de calcul à celle de Gagnon, il faudrait que l'on puisse fixer l'horizon de simulation pour toutes les répliques, et que ce choix unique permette une approximation de bonne qualité quelque soit le tirage.

Nous montrerons dans un des paragraphes suivants que cela est tout à fait possible moyennant quelques manipulations numériques préliminaires que nous préciserons.

2) Le modèle :

En guise d'application simple, nous avons considéré le modèle de croissance suivant :

$$\text{Max } E_0 \left\{ \sum_{t \geq 0} \delta^t u(c_t) \right\}$$

sous les contraintes : (1) $c_t + I_t + \psi \left(\frac{I_t}{k_{t-1}} \right) = A z_t k_{t-1}^\alpha$

$$(2) I_t = k_t - \mu k_{t-1}$$

et : (3) $\text{Ln}(z_t) = \rho \text{Ln}(z_{t-1}) + \varepsilon_t$ avec ε_t une loi normale $N(0; \sigma^2)$.

Il s'agit du modèle classique de Ramsey où l'on détermine le plan de consommation intertemporelle de façon optimale en satisfaisant à la contrainte budgétaire suivant laquelle la somme de la consommation (c_t), de l'investissement (I_t) et du prix payé pour l'ajustement du capital ($\psi(\frac{I_t}{k_{t-1}}$ où I_t est l'investissement) doit être égale au revenu disponible représenté par la production à technologie "Cobb-Douglas" $A z_t k_{t-1}^\alpha$ où k_{t-1} est le stock de capital disponible au début de la période t , z_t est le choc de productivité et A un facteur d'échelle déterministe. Les variables endogènes sont toutes données par tête.

Le logarithme népérien de ce choc est supposé suivre un processus AR(1) à coefficient de persistance ρ inférieur à 1 en module pour l'hypothèse de stationnarité et à innovation normale. α est donc l'élasticité du revenu par rapport au capital, μ est le complémentaire à 1 du taux de dépréciation du capital et δ est le taux d'escompte psychologique. Pour les simulations, nous prendrons pour la fonction d'utilité une forme à indice relatif pour le risque constant (CRRA) : $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ où γ est l'indice d'aversion relatif pour le risque.

D'autre part, nous prenons une forme quadratique pour la fonction $\psi(\cdot)$, $\psi(x) = \beta x^2$, β étant une constante.

Nous avons utilisé cette simple formalisation partiellement pour pouvoir nous référer aux travaux effectués dans la même optique par un groupe de modélisation du NBER en 1990, que résumant Taylor et Uhlig. Elle nous permet aussi d'effectuer quelques exercices de "style" dont la portée économique est forcément limitée par la pauvreté du modèle.

Avec nos hypothèses, la condition nécessaire de première ordre-équation (4)-s'écrit :

$$(4) \quad c_t^{-\gamma} [2\beta \{ \frac{k_t}{k_{t-1}} - 1 \} + 1] = \delta E_t \{ c_{t+1}^{-\gamma} [A \alpha z_{t+1} k_1^{\alpha-1} + 1 - 2\beta \frac{k_{t+1}}{k_t} (1 - \frac{k_{t+1}}{k_t})] \}.$$

Pour appliquer la méthode de Laffargue, un fois un tirage de ε_t effectué, nous remplaçons le terme anticipé k_{t+1} par $I_{t+1} + \mu k_t$, ce qui nous permet de nous ramener pour chaque période t , à un système de trois équations (1), (2) et (4), à deux variables non-prédéterminées, la consommation et l'investissement, et à une variable prédéterminée, le capital.

A long terme, le capital est déterminé par l'expression $\left[\frac{1-\delta}{\delta\alpha} \right] \frac{1}{1-\alpha}$, la consommation de long terme se déduisant alors grâce à l'équation (1) et l'investissement de long terme par l'équation (2).

Nous donnons dans les paragraphes suivants un résumé des simulations numériques menées, en suivant la logique d'investigation donnée dans le paragraphe d'introduction.

3) Les expériences numériques :

Nous commençons l'exposé d'abord par une comparaison en terme de précision de calcul entre les règles de décision **"point par point"** déduites par Gagnon et celles qu'on obtient; ensuite, nous montrons la nette insuffisance des méthodes de linéarisation au niveau justement de la précision de calcul. **Par ces expériences, on évalue la question de l'évaluation du biais dû au calcul numérique pour chaque méthode.** Dans un second temps et afin de développer certaines méthodes de validation, on abandonne l'optique **"point par point"** pour engendrer des séries temporelles artificielles : au préalable, on étudie la question du choix d'un l'horizon de simulation commun à toutes les répliques utilisées dans ce but, puis des paragraphes seront consacrés à la validation économique et statistique des résultats : étude des volatilités, des fonctions de réponses puis introduction de la m-statistique de Den Haan et

Marcel. En particulier, nous précisons et interprétons les choix des bons paramètres expérimentaux en relation avec la m-statistique.

Nous notons la méthode que nous utilisons LAFM.

3. a) L'évaluation du biais au calcul numérique : une comparaison des règles de décision point par point.

a. 1) Comparaison des méthodes LAFM et de Gagnon :

Pour pouvoir disposer d'une règle de décision analytique pour le capital et la consommation, et ainsi de mesurer directement la précision de la méthode, nous supposons dans cette partie qu'il y a dépréciation totale du capital ($\mu=0$), que la fonction d'utilité est logarithmique, qu'il n'y a pas de coûts d'ajustement ($\beta=0$). Avec ces hypothèses, la règle de décision pour le stock de capital est explicitement donnée par l'expression : $k_t = \alpha A \delta z_t k_{t-1}^\alpha$. A chaque valeur du couple (z_t, k_{t-1}) correspond une décision unique pour le stock de capital.

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par Gagnon et ce que nous obtenons, nous adoptons les mêmes valeurs numériques pour les paramètres : $\alpha=0.9$, $\delta=0.95$, $A=1.5^{10}$, $\rho=0.95$. On fixe aussi $z_0=1$. Comme cela sera clair dans le paragraphe c), la valeur élevée de ρ nous oblige à retenir un horizon de simulation assez élevé-200. Nous avons retenu pour le seuil de convergence deux valeurs successives : une première égale à 5.10^{-4} identique au seuil de convergence retenu par Gagnon pour les itérations du premier type selon la terminologie de Fair et Taylor, et un second seuil légèrement plus étroit égal à

¹⁰ Cette valeur est différente de celle annoncée par Gagnon dans le texte [1990]: il annonce une valeur de 1.2; cependant, le tableau de résultats qu'il fournit correspond à la valeur de A que nous avons prise ici.

10^{-5} . Le tableau 1 donne les règles de décision "point par point", k_1 pour le capital, calculées avec chacune des deux méthodes, à comparer avec la solution analytique, pour $z_1=0.7$ et k_0 variant de 5 à 25 et pour un seuil de convergence égal à $5 \cdot 10^{-4}$ pour la méthode que nous utilisons :

Tableau 1
Règles de décision pour le capital pour un choc de productivité égal à 0.7
et pour différentes valeurs pour le stock initial du capital

Capital initial	LAFM	Gagnon ¹¹	Exacte
5	3.81979	3.82	3.82145
10	7.13103	7.12	7.13108
15	10.27334	10.26	10.27158
20	13.30932	13.29	13.30706
25	16.26880	16.25	16.26677

Les résultats précédents sont représentatifs de toutes les expériences menées avec diverses valeurs pour le vecteur d'état du modèle (k_0, z_1); ils montrent clairement que les décisions calculées avec la méthode LAFM approchent les solutions analytiques avec une précision absolue de l'ordre de 10^{-2} . La précision de la méthode de Gagnon est globalement moindre, sa valeur absolue moyenne est de l'ordre de 10^{-1} . D'autre part, la **précision relative de la méthode LAFM est de l'ordre de 10^{-4} pour toutes les valeurs du capital initial.**

Mais là n'est pas l'avantage principal de la méthode LAFM : en effet, si l'on considère un seuil de convergence légèrement plus étroit, 10^{-5} , on retrouve

¹¹ Gagnon ne donne que des résultats arrondis à la deuxième décimale.

avec cette méthode une précision absolue de l'ordre du seuil de convergence ! Tandis que le resserrement précédent du seuil de convergence ne coûte qu'une ou deux itérations de Newton-Raphson supplémentaires, il exigerait un surcroît de calculs beaucoup plus important dans la méthode de Gagnon. Le tableau 2 donne les décisions calculées par les deux méthodes mais avec cette fois-ci un seuil de convergence égal à 10^{-5} pour la méthode LAFM, z_1 est fixé à 1.3 :

Tableau 2
Règles de décision pour le capital pour un choc de productivité égal à 1.3
et pour différentes valeurs pour le stock initial du capital

Capital initial	LAFM	Gagnon	Exacte
5	7.09698	7.09	7.09698
10	13.24343	13.23	13.24343
15	19.07580	19.06	19.07580
20	24.71312	24.69	24.71312
25	30.20972	30.19	30.20972

Dans une stratégie de simulation stochastique telle que dans celle où on s'est placé, la méthode LAFM jouit des propriétés attendues de vitesse de convergence (qui est sans comparaison avec la méthode de Gagnon) et de précision. Dans le paragraphe suivant, nous montrons l'insuffisance de précision des méthodes de linéarisation.

3.b) Les imprécisions des méthodes de linéarisation :

Afin de disposer encore de solutions analytiques, nous reprenons le même paramétrage que celui utilisé dans le paragraphe précédent. Nous présentons la méthode de linéarisation que nous avons utilisée. Nous la notons L1.

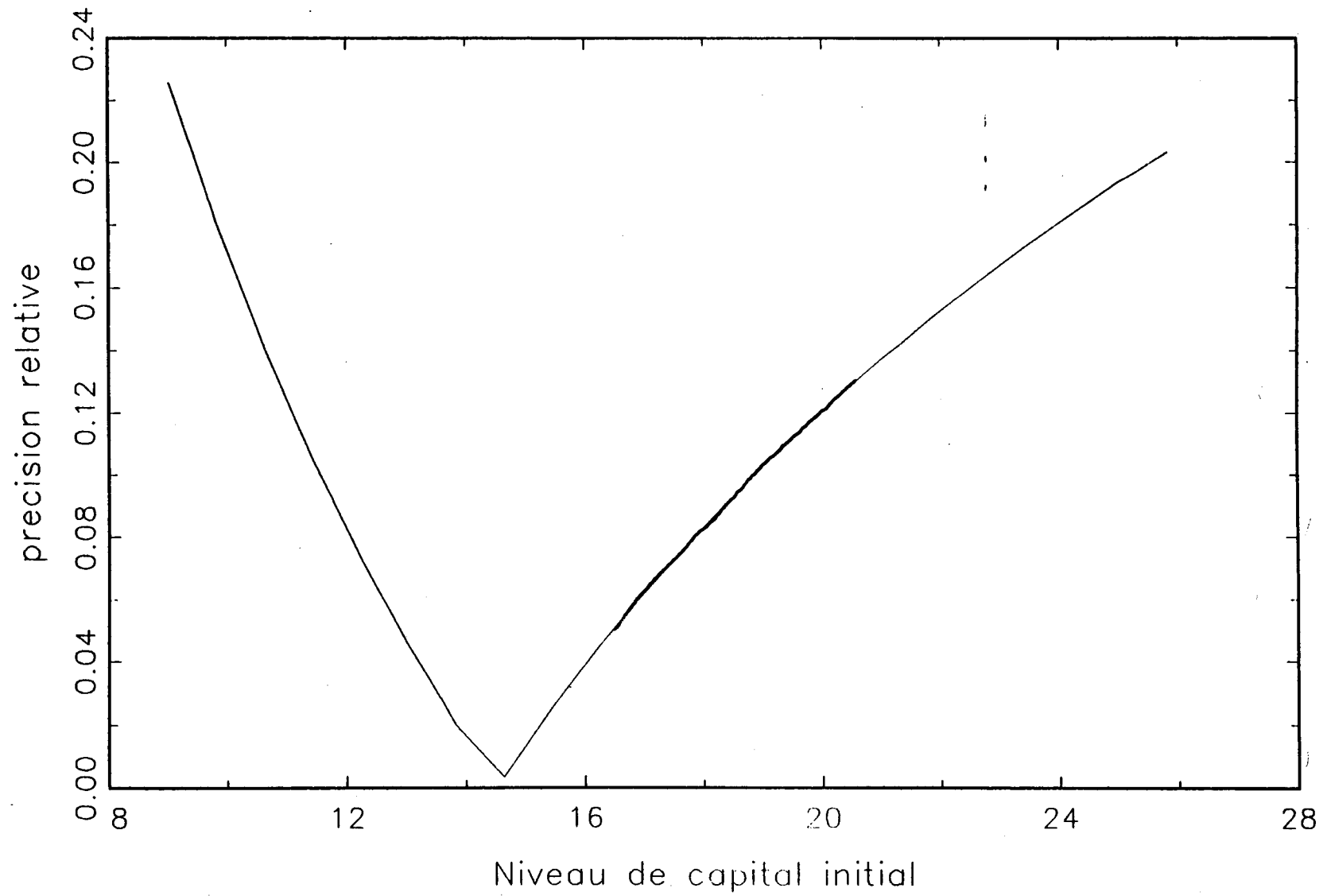
Cette méthode fait le lien avec la technique de résolution standard en univers linéaire, celle de Blanchard et Kahn [1980] : après linéarisation de toutes les équations du modèle, on se ramène après élimination de la variable de consommation grâce à l'équation d'équilibre des ressources, à une équation de récurrence du type :

$$a E_t [k_{t+1}] + b k_t + c k_{t-1} = d z_t$$

où a, b, c, d sont des constantes et les notations k et z pour les déviations des variables k et z par rapport à l'équilibre stationnaire. Pour qu'il existe une unique règle de décision unique, il faut et il suffit qu'il y ait une unique racine non-explosive au polynôme caractéristique de l'équation de récurrence, que nous notons λ_0 . La règle de décision unique s'écrit alors : $k_t = \lambda_0 k_{t-1} + \omega z_t$ où ω est une constante aisément identifiable. On trouve alors par simple translation la règle de décision pour le stock de capital.

Les simulations effectuées avec la méthode L1 reposent sur les mêmes conditions expérimentales que celles menées dans le paragraphe précédent : on prend z_1 égal à 0.7 et on fait varier le capital initial k_0 largement autour de l'équilibre stationnaire. On mesure la précision **relative** de la méthode par comparaison avec la règle de décision explicite. Le graphique joint montre la variation de cette précision en fonction du capital initial. Quelques faits simples ressortent de ce graphique :

Erreur relative par niveau de capital initial dans la methode L1



- d'abord l'immense différence en précision entre cette méthode et les méthodes LAFM et de Gagnon, et ce quelque soit la valeur du stock de capital initial. Alors qu'avec la méthode LAFM, on a atteint une précision absolue égale au seuil de convergence sévère que l'on a considéré- 10^{-5} , la méthode L1 ne passe en dessous d'une erreur relative de 1% que pour un intervalle étroit du stock de capital initial.

- on observe aussi un intervalle pour les valeurs du capital initial où l'erreur relative atteint son niveau le plus faible. Notons que cet intervalle n'est pas centré sur la valeur de long terme du capital : celle-ci est égale à 12.0385 et l'intervalle en question est centré sur une valeur voisine de 14. Cela n'est pas inquiétant outre mesure car il est improbable que les fonctions de décision obtenues par linéarisation des équations du modèle autour d'un point soient les approximations linéaires autour de ce point des fonctions de décision exactes correspondant au problème originel.

Nous constatons seulement que la méthode L1, par nature, ne peut atteindre une précision arbitraire. Sur notre exemple, elle est montrée nettement inférieures à la méthode LAFM par exemple. C'est donc avec cette méthode que nous allons conduire la suite de notre étude.

3.b) Les techniques de validation sur les échantillons générés.

b.1) Le choix de l'horizon de simulation :

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 1), il est important de fixer un horizon de simulation commun à toutes les répliques si l'on désire engendrer des séries temporelles artificielles. Pour bien voir le problème, reportons-nous à la technique de génération de pseudo-séries temporelles donnée dans le même paragraphe 1). Deux éléments y jouent principalement :

d'abord l'amplitude des chocs et ensuite leur durée¹². Rappelons que nous avons considéré une structure autorégressive pour les variables exogènes du modèle : $x_t = \Phi(L) x_t + \varepsilon_t$ avec ε_t suivant une loi normale de moyenne M et de matrice de variance-covariance Σ , soit $N(M, \Sigma)$. Les grandeurs d'intérêt ici sont alors la matrice de variance-covariance de l'innovation ε_t , soit $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ¹³, et les racines du polynôme $\Phi(L)$, que nous notons $(\theta_k)_k$. Si l'amplitude de l'innovation est faible, si les modules des racines $(\theta_k)_k$ sont largement plus petite que l'unité et si nous initialisons les variables exogènes par leurs valeurs de référence¹⁴, alors les solutions obtenues pour chaque tirage, servant à l'initialisation des tirages suivants, présenteront de faibles fluctuations autour de l'équilibre de long terme du modèle. A l'inverse, si l'amplitude ou la durée des chocs est grande, de plus larges fluctuations sont prévisibles, d'où la difficulté apparente de fixer un horizon de simulation commun à toutes les répliques.

On peut, cependant, apporter à cette question un traitement numérique : on doit tester initialement les réponses du modèle à des innovations fortes. Si q est le nombre de variables exogènes, on considère l'innovation $\varepsilon = (P \sigma_{11}, P \sigma_{22}, \dots, P \sigma_{qq})'$ où P est un entier compris entre 2 et 4, et on détermine l'horizon de simulation qui permet d'obtenir les solutions les plus correctes. On considérera alors cet horizon pour toutes les répliques à faire.

Cette solution peut objectivement conduire à retenir des horizons plus élevés qu'il n'est nécessaire, mais le temps perdu en calculs supplémentaires est largement récupéré par un surcroît de précision. De toute façon, même avec cet aménagement, il est fort probable que la méthode reste encore largement

¹² Bien que l'innovation soit ponctuelle, le choc sur les variables exogènes sera d'autant plus persistant que les racines du polynôme $F(\cdot)$ seront proches de l'unité.

¹³ Cette matrice peut être par exemple calculée par une étape d'estimation préliminaire.

¹⁴ Soit celles utilisées pour calculer l'équilibre de long terme du modèle.

supérieure en temps de calcul à celle de Gagnon. Nous reprenons ici cette analyse pour l'appliquer à notre modèle de référence.

D'abord, nous montrons que le choix de l'horizon de simulation, à variance de l'innovation donnée, dépend crucialement du coefficient de persistance, ρ .

Dans le tableau 3 ci-dessous, nous donnons les valeurs des horizons de simulation choisis en fonction de ρ , pour : $A=1$, $\alpha=0.25$, $\beta=0$, $\gamma=0.5$, $\delta=0.9$, $\mu=1$ et $\sigma=0.01$. Comme annoncé, nous déterminons l'horizon T en résolvant le modèle de façon déterministe en supposant que le tirage donne une valeur de $P\sigma$ pour l'innovation, où P est un entier. Le seuil de convergence pour les itérations de Newton-Raphson a été fixé à 10^{-5} , et nous cherchons les horizons de simulation qui permettent d'atteindre les valeurs de long terme avec une précision absolue égale à 10^{-4} . L'entier P a été fixé à 3, et de fait lorsque l'on suit les solutions des répliques les unes après les autres, ce choix s'avère correct bien que pour la plupart des répliques, la solution obtenue atteigne les valeurs de long terme quelques périodes avant la fin de l'horizon.

Tableau 3

Horizons de simulation retenus pour différentes valeurs de ρ , $\sigma=0.01$

ρ	0.25	0.5	0.65	0.85	0.9	0.95
T	38	40	42	65	88	170

Les résultats sont assez nets : pour les valeurs de ρ largement inférieures à 1 (soit pour des modules des racines du polynôme $\Phi(\cdot)$ largement inférieurs à 1 avec les notations du paragraphe précédent), l'horizon de simulation requis est stable autour de 40 périodes. Au voisinage de 1, l'augmentation n'est plus linéaire et on a besoin pour la dernière valeur de ρ de retenir un horizon de près de deux cents périodes.

Lorsque la variance de l'innovation augmente, on a besoin d'horizons encore plus élevés, comme le montre le tableau 4 suivant avec $\sigma=0.1$:

Tableau 4

Horizons de simulation retenus pour différentes valeurs de ρ , $\sigma=0.1$

ρ	0.25	0.5	0.65	0.85	0.9	0.95
T	50	52	54	77	110	217

Là encore, par rapport à la situation précédente, le fait de multiplier la variance de l'innovation par dix a des effets "linéaires" sur le choix de l'horizon jusqu'à la quatrième valeur de $\rho=0.85$; au delà, les effets sont beaucoup plus importants. Cette étape de choix de l'horizon est capitale dans la mesure où elle représente le plus de rigueur qu'apporte la méthode déterministe de Laffargue par rapport à la technique de l'"extended path" : elle doit donc être menée avec le plus grand soin, en décortiquant les processus stochastiques du point de vue de leurs coefficients de persistance et de l'amplitude de leurs innovations, comme nous l'avons fait sur cet exemple il est vrai sommaire.

b.2) L'étude des volatilités :

Dans ce paragraphe ainsi que dans les paragraphes qui vont suivre, nous abordons le thème de la validation des expériences stochastiques. L'application la plus immédiate qu'on puisse faire pour exploiter les pseudo-échantillons engendrés par simulation consiste à faire varier certains paramètres et à vérifier si les résultats obtenus concordent avec l'intuition économique. Le calcul des volatilités des variables endogènes est l'exercice le plus usuel dans ce contexte là. Dans notre modèle par exemple, on peut mesurer l'influence des

coûts d'ajustement sur le capital en étudiant les volatilités des variables endogènes avec ou sans coûts d'ajustement, en rapport avec l'élasticité du revenu par rapport au capital. Nous voulons vérifier par cela les deux faits stylisés suivants :

- i) A élasticité revenu-capital donnée, la volatilité du capital est plus faible en présence de coûts d'ajustements.
- ii) Les coûts d'ajustement ont un rôle d'autant moins prépondérant que l'élasticité revenu-capital est forte. Ceci s'explique par le fait que plus cette élasticité est élevée, plus l'agent représentatif est conduit à baisser son investissement.

On a donc conduit des simulations sur quatre paramétrages de notre modèle de référence.

Pour les quatre paramétrages, on fixe ρ à 0.5 et σ à 0.01, ce qui permet de retenir des horizons de simulation relativement courts. γ est fixé à 0.5, μ et A à 1. Nous faisons varier les valeurs de α de 0.25 à 0.5, β étant égale à 0 puis à 1 pour chaque valeur de α . Pour chacun des paramétrages, nous avons engendré pour les variables endogènes des séries temporelles artificielles de taille 1000 et nous avons utilisé ces dernières pour faire des calculs d'écarts-types, soit de volatilités; prendre un nombre de répliques plus important ne modifie que très légèrement les résultats obtenus.

Dans le tableau 5 suivant, nous donnons la volatilité du capital calculée pour chaque paramétrage $VOL(k)$, en notant RAP le rapport de la volatilité du capital sur la volatilité de la consommation :

Tableau 5
Volatilité du capital et rapport des volatilités par paramétrage

Cas	VOL(k)	RAP
$\alpha=0.25, \beta=0$	0.028	2.63
$\alpha=0.25, \beta=1$	0.021	2.04
$\alpha=0.5, \beta=0$	0.172	4.37
$\alpha=0.5, \beta=1$	0.155	4.32

Le tableau 5 illustre les propriétés très simples suivantes :

- la volatilité du capital est dans tous les cas supérieure à la volatilité de la consommation.
- la volatilité du capital baisse en présence de coûts d'ajustement. Cette baisse est d'autant plus forte que l'élasticité revenu-capital est faible.
- la volatilité de la consommation baisse aussi en présence des coûts d'ajustements. Cette baisse est d'autant plus forte que l'élasticité revenu-capital est forte.

Les coûts d'ajustement joue ainsi un rôle d'autant moins prépondérant que l'élasticité revenu-capital est forte.

Sur d'autres simulations que nous n'avons pas inclus ici, nous avons vérifié d'autres propriétés simples connues, par exemple que la volatilité de la consommation baisse si l'indice d'aversion relatif pour le risque augmente, en même temps que celle du capital augmente,..etc.....

L'exercice précédent permet ainsi de mettre en évidence quelques relations économiques simples, ici limitées par la pauvreté du modèle. On peut imaginer que dans des modèles plus riches, un tel exercice pourrait être une bonne entrée en matière et à moindre coût numérique. Son aspect dynamique reste néanmoins tout relatif et il convient de le compléter par une analyse plus fine, celle par exemple que permettent les fonctions de réponse.

b.3) Les fonctions de réponses :

Le calcul des fonctions de réponse est une technique complémentaire qu'on utilise pour illustrer la covariation des variables endogènes d'un système avec la séquence temporelle des chocs qui viennent le perturber. Par exemple, dans notre modèle, il est possible de calculer la fonction de réponse du stock de capital et de la consommation à la séquence des chocs $(\varepsilon_t)_t$. Pour le capital par exemple, il s'agit finalement de déterminer une fonction $R(.)$ telle que :

$$k_t = R(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \dots) \text{ où } p \geq 0.$$

Comme le constate Marcet [1991], le modèle étant non-linéaire, la fonction $R(.)$ est non-linéaire. Bien qu'identifier la fonction $R(.)$ par simulation ne soit pas à priori impossible, l'approche habituelle est d'utiliser la projection de la fonction $R(.)$ sur l'espace engendré par les $(\varepsilon_{t-p})_{p \geq 0}$ et de déterminer la séquence des réels $(b_p)_{p \geq 0}$ tels que :

$$k_t = \sum_{p \geq 0} b_p \varepsilon_{t-p} + n_t$$

où n_t modélise le résidu dû aux non-linéarités. Comme d'habitude, les coefficients b_p sont estimés par la technique des moindres carrés ordinaires, soit sous les hypothèses usuelles :

$$\text{pour } p \geq 0, \quad b_p = \frac{E(k_t \varepsilon_{t-p})}{E(\varepsilon_t^2)}.$$

En remplaçant l'expression précédente par son approximation empirique, on arrive ainsi par la simulation à quantifier ces coefficients. Après correction par un facteur d'échelle égal au rapport de l'écart-type de l'innovation sur l'écart-type de la variable endogène étudiée, on construit aisément la fonction de réponse fournissant le coefficient de réponse ainsi corrigé, disons B_p , suivant le retard p .

Comme on peut le voir, une telle construction permet en dernier ressort d'étudier les covariances des variables endogènes, avancées ou retardées du nombre de périodes désiré, en supposant légitimement que les covariances des résidus des non-linéarités sont faibles.

Nous nous sommes contentés ici, en guise d'illustration, de calculer les fonctions de réponse pour le stock de capital pour le premier et le deuxième paramétrages donnés dans le paragraphe précédent et pour p allant de 0 à 10. L'idée est donc de voir l'effet des coûts d'ajustement sur la forme des fonctions de réponse. La difficulté pratique de ce type d'exercice est qu'il nécessite la construction de pseudo-échantillons de grande taille pour atteindre une certaine stabilité des coefficients de réponse; pour notre part, la taille minimale requise a été de 10000 observations.

Les résultats sont illustrés par le graphique ci-joint. Notons d'abord pour les deux paramétrages une forme voisine : la réponse du stock de capital suite à un choc de productivité positif, après une hausse nette, atteint un plateau sur quelques périodes. Cet intervalle où la réponse se stabilise mesure, en quelque sorte, l'aspect "permanent" de cette réponse. En l'occurrence, on constate que cet intervalle ne dure que quelques périodes quelque soit le paramétrage, ce qui indique donc le caractère peu permanent des réponses. Comme on peut le

comprendre, cet aspect est lié à la persistance des innovations : dans notre cas, plus le coefficient ρ sera proche de 1, plus la réponse à la hausse aura un aspect permanent. Or, nous avons pris ici une valeur médiane pour ce coefficient, $\rho=0.5$.

En fait, la différence entre les deux paramétrages est formellement double :

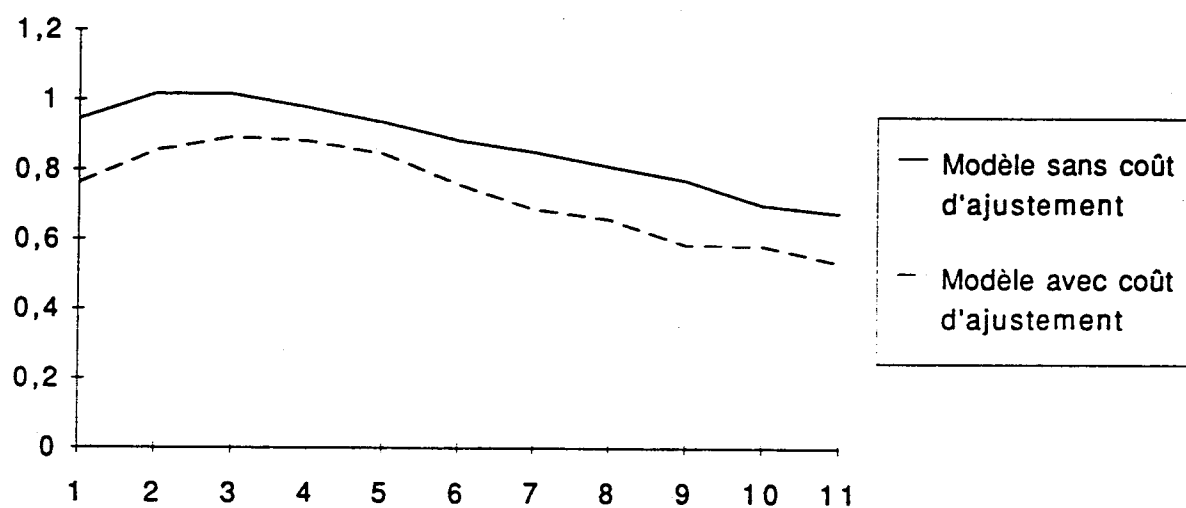
- la réponse est plus forte quand il n'y a pas de coût d'ajustement.
- la réponse est plus "permanente" quand il y a un coût d'ajustement : la courbe décroît plus tôt en absence des coûts d'ajustements. Le graphique montre que pour le premier paramétrage, la réponse décroît après la troisième période alors qu'elle ne décroît nettement que deux périodes plus tard pour le second paramétrage.

Le premier constat est trivial : l'investissement est moins important en présence de coût d'ajustement. Le second, plus intéressant, recoupe simplement le fait que la volatilité du stock de capital est plus forte en l'absence de coût d'ajustement, ce qui concorde avec les résultats du paragraphe précédent. Ainsi, le degré de permanence de la réponse est fortement lié au niveau de volatilité de la variable étudiée.

Ce n'est là qu'un des outputs possibles de l'étude des fonctions de réponse : plus intéressant, avons-nous déjà dit, serait l'étude des **covariations** des variables endogènes qui s'en déduit. Dans notre cas, la pauvreté du modèle utilisée ne rend pas cette étape nécessaire, les deux exercices précédents suffisent à la recouvrir. On imagine que dans d'autres modèles plus riches, tous les niveaux d'investigation seraient intéressants.

Nous abordons dans le paragraphe suivant, une méthode de validation purement statistique.

Fonctions de réponse du stock de capital



b.4) La m-statistique :

Les simulations que nous avons conduites jusqu'à présent souffrent de l'hypothèse d'anticipation parfaite sous-jacente comme nous l'avons expliqué par ailleurs. Cette hypothèse génère un biais dû aux non-linéarités du modèle.

On peut alors se demander s'il est possible d'évaluer ce biais dû à notre traitement numérique de l'aspect anticipatif du modèle. La question a suscité peu de travaux concluants jusqu'à présent : Sims [1989] et Den Haan et Marcet [1989] ont néanmoins présenté quelques pistes très intéressantes. Naturellement, l'approche qu'ils adoptent est purement statistique et consiste à vérifier sur les échantillons engendrés par simulation quelques propriétés qu'implique l'hypothèse d'anticipation rationnelle. La statistique que proposent Den Haan et Marcet, appelée m-statistique, permet ainsi de tester la propriété de différence de martingale sur les résidus des équations d'Euler. Si nous notons le résidu de l'équation d'Euler de notre modèle, η_t avec par exemple :

$$\eta_t = \frac{\delta c_{t+1}^{-\gamma} [A \alpha z_{t+1} k_1^{\alpha-1} + 1 - 2\beta \frac{k_{t+1}}{k_t} (1 - \frac{k_{t+1}}{k_t})]}{c_t^{-\gamma} [2\beta \{\frac{k_t}{k_{t-1}} - 1\} + 1]} - 1, \text{ alors la m-statistique consiste}$$

à tester l'hypothèse nulle : $E_{t-1}[\eta_t] = 0$. Pour ce faire, les auteurs construisent une statistique de test qui suit asymptotiquement une loi du χ^2 approximativement, dans le cadre des modèles à innovation normale unique comme le modèle de Ramsey. Si l'on note par $\hat{\alpha}$ l'estimateur de moindres carrés issu de la régression des résidus sur un vecteur d'instruments choisis dans l'ensemble d'information de la période t-1 et noté x_t , soit :

$$\hat{a} = (\sum_t x_t' x_t)^{-1} \sum_t x_t' \eta_t$$

alors la m-statistique de Den Haan et Marcet est donnée par :

$$m = \hat{a}' (\sum_t x_t' x_t) (\sum_t x_t' x_t \eta_t^2)^{-1} (\sum_t x_t' x_t) \hat{a} .$$

De plus, à l'hypothèse nulle, m suit asymptotiquement une loi du χ^2 dont le nombre de degré de liberté est égal au nombre d'instruments considérés.

Dans notre application, nous avons considéré 11 instruments : une constante, cinq retards pour la consommation et cinq pour le choc de productivité. Nous nous plaçons dans le cas expérimental de Taylor et Uhlig en calculant la statistique pour un seuil de tolérance à droite et à gauche égal à 2.5% : on accepte alors l'hypothèse nulle si m est compris entre 3.82 et 21.92. Le tableau 6 suivant fournit les valeurs des statistiques pour les quatre paramétrages donnés dans le paragraphe 2.c) :

Tableau 6
Valeurs de la m-statistique par paramétrage

Cas	m
$\alpha=0.25, \beta=0$	10.86
$\alpha=0.25, \beta=1$	14.22
$\alpha=0.5, \beta=0$	9
$\alpha=0.5, \beta=1$	8.88

Les paramétrages que nous avons pris "passent" ainsi le test de la m-statistique très aisément. Notons d'abord que même pour les paramétrages où les coûts

d'ajustement quadratiques ne sont pas nuls, on reste assez loin des valeurs critiques du test. En fait, ce n'est qu'en prenant des innovations à écart-type plus élevé (supérieur à 0.1), à fort coefficient de persistance (autour de 0.95) que nous avons obtenu pour des valeurs assez élevées des autres paramètres du modèle des cas de rejet de l'hypothèse nulle. En particulier, l'ordre de grandeur de la variance de l'innovation joue un rôle central : plus cette quantité est grande, plus les échantillons engendrés sont loin des valeurs critiques du test de la m-statistique. En se reportant à nos remarques précédentes, cela semble suggérer que cette quantité intervient de façon prépondérante dans la non-linéarité du modèle. Ce qui rejoint un constat fait par Marcet [1991] sur la simulation d'un même type de modèle par le paramétrage des anticipations : le paramétrage avec des fonctions linéaires ne suffit plus dès que la variance de l'innovation dépasse 0.1, il faut alors paramétrer par des polynômes de degré supérieur pour améliorer la précision des calculs.

Le fait que la méthode de Gagnon passe mal le test de la m-statistiques recoupe en fait simplement que la plupart des paramétrages considérés par Taylor et Uhlig utilisent des innovations à variance égal à 0.1 et à fort coefficient de persistance.

Comment notre méthode peut apporter plus de rigueur sous cet angle là? Pour une raison précise : en considérant que la plupart des modèles macroéconomiques sont localement faiblement non-linéaires, initialiser l'algorithme pour la première réplique, par exemple au voisinage de l'équilibre stationnaire stable du modèle traité et prendre pour le processus stochastique des variables exogènes de faibles variances et/ou de faibles coefficients de persistance, garantit en général que l'on reste le plus souvent dans un domaine de faibles non-linéarités du modèle. Il en résulte un traitement numérique correct des anticipations rationnelles du modèle simulé.

Les paramétrages que nous avons considérés et notre pratique de l'algorithme ont satisfait complètement à ces conditions, ce qui explique ainsi *à postériori* les valeurs de la m-statistique que nous avons obtenues.

Cet aspect statistique de la validation devrait suggérer de nombreux enrichissements dans le futur proche pour donner à la méthodologie de simulation à anticipations stationnaires des assises validant l'expérimentation numérique qui semble désormais incontournable. Etendre l'approche de Den Haan et Marcet à des modèles plus généraux que ceux à innovation normale unique semble par exemple tout à fait réalisable.

Conclusion :

Le but des simulations données ci-dessus est de montrer qu'il est possible de conduire, pour un modèle non-linéaire à anticipations rationnelles, une simulation stochastique :

- très simple dans sa conception, une fois l'algorithme de Laffargue programmé.
- aux multiples applications, et nous n'avons présenté que les plus simples.
- ayant quelques éléments de rigueur qui permettent de contrôler l'aspect purement numérique de la méthode pour de bons choix des paramètres de l'expérimentation stochastique que nous avons précisés et interprétés.

Nous avons aussi mis en évidence le double-avantage de la méthode utilisée : maîtrise stricte de l'approximation par un choix particulièrement sévère de l'horizon de simulation et possibilité d'améliorer la précision des calculs avec un surcroît d'itérations beaucoup moins important que ce qu'exigerait la méthode de Gagnon.

Le cadre expérimental que nous avons développé nous semble adapté à de nombreuses applications économiques pour les raisons que nous avons évoquées précédemment. Nous sommes par ailleurs conscients de ces limites en cas de fortes non-linéarités, mais à l'heure actuelle et à notre connaissance, on ne voit aucune méthode alternative susceptible de traiter ces cas pour les modèles de grande taille.

Bibliographie :

- Blanchard, O et C.Kahn (1980) : " The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations" *Econometrica*, 48.
- Boucekkine, R (1992-a) : "Simulations Stochastiques et Anticipations Rationnelles" *Discussion Paper N° 9212, Université Catholique de Louvain*.
- Boucekkine, R (1992-b) : "Sur l'Utilisation de la Technique de la Boucle Intérieure Incomplète dans les Méthodes de Point Fixe" *Manuscrit, Université Catholique de Louvain*.
- Coleman, W (1990) : "Solving the Stochastic Growth Model by Policy-Function Iteration" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.
- Den Haan, W et A.Marcet (1990) : "Solving the Stochastic Growth Model by Parameterizing Expectations" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.
- Den Haan, W et A.Marcet (1989) : " Accuracy in Simulations" *Manuscrit Carnegie-Mellon University*.
- Gagnon, J (1990) : " Solving the Stochastic Growth Model by Deterministic Extended Path" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.
- Fair, R (1984) : Specification, Estimation and Analysis of Macroeconomic Models, *Harvard University Press*.

- Fair, R et J-B.Taylor (1983) : "Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Rational Expectations Models" *Econometrica*, 51.
- Hall, S-G et S-B Henry (1986) : "Rational Expectations in an Econometric Model, NIESR Model 8" *National Institute Economic Review* , 120.
- Ingram, B-F (1990) : "Equilibrium Modelling of Asset Prices : Rationality versus Rules of Thumb" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.
- Kydland, F et E.Prescott (1982) : "Time to Build and Aggregate Fluctuations" *Econometrica*, 50.
- Laffargue, J-P (1990) : " Résolution d'un Modèle Macroéconomique à Anticipations Rationnelles" *Annales d'Economie et Statistique*, 17.
- Lee, B-S (1989) : " Solving, Estimating and Testing a Nonlinear Stochastic Equilibrium, with an Example of the Asset Returns and Inflation Relationship" *Journal of Economic Dynamics and Control*, 13.
- Marcet, A (1991) : " Solving Non-Linear Stochastic Models by Parameterizing Expectations : An Application to Asset Pricing with Production " *Manuscript non publié, Universitat Pompeu Fabra, Barcelone*.
- Sims, C (1989) : " Solving Nonlinear Stochastic Optimization and Equilibrium Problems Backward" *Discussion Paper 15, Federal Reserve Bank of Minnesota*.
- Sims, C (1990) : "Solving the Stochastic Growth Model by Backsolving with a Particular Nonlinear Form of the Decision Rule" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.
- Tauchen, G (1986) : "Statistical Properties of Generalized Method of Moments Estimators of Structural Parameters Obtained from Financial Market Data" *Journal of Business and Economic Statistics*, 4.
- Tauchen, G et R.Hussey (1991) : "Quadrature-Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to Nonlinear Asset Pricing Models" *Econometrica*, 59.

-Taylor, J.B et H.Uhlig (1990) : "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models : A Comparison of Alternative Solution Methods" *Journal of Business and Economic Statistics*, 8.