

AOUT 1987.

N. 8722

AGREGATION DE PROCESSUS AUTOREGRESSIFS

D'ORDRE 1

GONCALVES, E.* and C. GOURIEROUX**

* Université de Coïmbra.

** CEPREMAP.

AGREGATION DE PROCESSUS AUTOREGRESSIFS D'ORDRE 1

GONCALVES, E. and C. GOURIEROUX

R E S U M E

Dans cet article nous nous intéressons à l'agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1. Nous déterminons le modèle de série temporelle satisfait par la série agrégée et caractérisons toutes les séries pouvant s'interpréter comme de tels agrégats.

Nous étudions plus en détail le cas où la distribution d'hétérogénéité du coefficient de régression est une loi bêta. En particulier nous proposons un test d'homogénéité et discutons le sens du biais d'hétérogénéité.

AGGREGATING AUTOREGRESSIVE PROCESSES

GONCALVES, E. and C. GOURIEROUX

A B S T R A C T

The aim of this paper is the aggregation of AR(1) processes. We determine the dynamic models satisfied by the aggregated series and we characterize all the series which may be interpreted as such an aggregate.

We study more carefully the case of a beta heterogeneity distribution. In particular we propose an homogeneity test and we discuss the sign of the heterogeneity bias.

J.E.L. CLASSIFICATION SYSTEM : 210

MOTS CLES : Séries temporelles, mémoire longue, hétérogénéité.

KEYWORDS : Time series, long memory model, heterogeneity.

I - INTRODUCTION.

Les modèles usuels de séries temporelles comme les représentations autorégressives (ou autorégressives moyennes mobiles) sont en pratique utilisées aussi bien dans le cadre d'études microéconomiques (par exemple dans la formalisation des erreurs d'un modèle panel) que macroéconomiques (détermination des multiplicateurs dynamiques). Cependant une telle pratique n'est mathématiquement justifiée que si la classe de séries temporelles retenue possède certaines propriétés d'invariances vis à vis de l'agrégation.

Dans cet article, nous nous intéressons essentiellement à l'agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1, suivant ainsi l'exemple étudié par Granger (1980).

Dans le paragraphe 2, nous déterminons le modèle de série temporelle satisfait par la série agrégée. Ceci permet de caractériser toutes les séries temporelles linéaires pouvant s'interpréter comme agrégats de séries autorégressives d'ordre 1.

Dans le paragraphe 3, nous étudions plus en détail le cas où la distribution d'hétérogénéité du coefficient de régression est une loi bêta. On voit alors que les séries agrégées satisfont des écritures hypergéométriques et sortent donc du cadre ARMA traditionnel. En particulier il apparaît que des agrégats de séries autorégressives stationnaires peuvent être non stationnaires ou être stationnaires avec des coefficients moyennes mobiles décroissant lentement (mémoire longue).

Dans le paragraphe 4, nous comparons les corrélations temporelles de la série agrégée avec la moyenne des corrélations temporelles des séries désagrégées et vérifions que les premières sont toujours plus grandes que les secondes,

lorsque les liaisons temporelles sont positives. Les écarts entre ces deux types de corrélations fournissent alors des mesures du degré d'hétérogénéité adaptées au cas des séries temporelles.

Finalement nous examinons dans le paragraphe 5 les implications statistiques de ces résultats, proposons un test d'homogénéité et discutons le sens du biais dû à l'oubli de la composante individuelle.

II - AGREGATION DE PROCESSUS AUTOREGRESSIFS D'ORDRE 1

2.A - LE PRINCIPE

Nous suivrons la procédure usuelle d'agrégation telle qu'elle est présentée par exemple par (Granger (1980)). Nous considérons une suite de processus autorégressifs d'ordre 1, avec des coefficients de régression différents et des erreurs pouvant être corrélées entre elles. Cette corrélation éventuelle est prise en compte par l'intermédiaire d'une décomposition de l'erreur en effet temporel et effet croisé. De façon plus précise, on pose :

$$(1) \quad X_{it} = \varphi_i X_{i,t-1} + c_i \varepsilon_t + \eta_{it} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\text{avec } X_{i,t-1} = 0 \quad .$$

Les bruits $(\varepsilon_t), (\eta_{1t}), (\eta_{2t}) \dots$ sont indépendants entre eux, centrés, de variances respectives $\sigma^2 = V \varepsilon_t$ et $\mu^2 = V \eta_{it}$, $\forall i$.

Remarquons que nous avons retenu une écriture autorégressive pour les seuls indices positifs. Ceci permet de considérer simultanément le cas de processus asymptotiquement stationnaires, lorsque $|\varphi_i| < 1$ et celui de processus non stationnaires, lorsque $|\varphi_i| > 1$.

Afin de mener à bien la procédure d'agrégation, nous ferons également des hypothèses sur les coefficients structurels φ_i, c_i . On suppose que ces valeurs peuvent être considérées comme résultant de tirages indépendants dans une même loi, que ces tirages sont indépendants des valeurs prises par les bruits et que les variables φ et c sont indépendantes entre elles. Le paramètre c qui permet d'introduire une hétéroscédasticité est contraint à être strictement positif.

La moyenne calculée sur les n premières séries est :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n,t} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^t \varphi_i^k [c_i \epsilon_{i,t-k} + \eta_{i,t-k}] \\ &= \sum_{k=0}^t \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^k c_i \right] \epsilon_{t-k} + \sum_{k=0}^t \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^k \eta_{i,t-k} \right]. \end{aligned}$$

Faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^k c_i &= E(\varphi^k c) = E(\varphi^k) (E c), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i^k \eta_{i,t-k} &= E(\varphi^k \eta_{i,t-k}) = E(\varphi^k) E(\eta_{i,t-k}) = 0. \end{aligned}$$

On voit alors qu'à la limite le processus agrégé : $\bar{X}_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_{n,t}$ satisfait une relation du type :

$$(2) \quad \bar{X}_t = \sum_{k=0}^t E(\varphi^k) E c \epsilon_{t-k} = \sum_{k=0}^t E(\varphi^k) \bar{\epsilon}_{t-k},$$

$$\text{avec } \bar{\epsilon}_t = E c \epsilon_t.$$

Nous avons mené cette agrégation de façon heuristique, sans justifier les divers passages à la limite. Il faut évidemment que certaines conditions de régularité soient satisfaites, en particulier que les divers moments $E \varphi^k$ existent.

2.B - CLASSIFICATION DES SERIES AGREGÉES

On peut distinguer plusieurs cas selon que la série agrégée est ou non (asymptotiquement) stationnaire et, lorsque la série est stationnaire, en fonction de la vitesse avec laquelle les coefficients moyennes mobiles tendent vers zéro. Ceci conduit aux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 3 :

i) La série agrégée est non (asymptotiquement) stationnaire si

$$\sum_{k=0}^{\infty} (E \varphi^k)^2 = +\infty .$$

ii) Elle est (asymptotiquement) stationnaire dans le cas contraire.

PROPRIÉTÉ 4 :

Si la série agrégée est (asymptotiquement) stationnaire :

i) elle est à mémoire longue, si $\sum_{k=0}^{\infty} |E \varphi^k| = +\infty$;

ii) elle est à mémoire courte, si $\sum_{k=0}^{\infty} |E \varphi^k| < +\infty$.

Lorsque la loi du coefficient de régression charge uniquement les valeurs positives, cette condition d'absolue sommabilité est facile à vérifier, puisque :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |E \varphi^k| = \sum_{k=0}^{\infty} E \varphi^k = E \left(\frac{1}{1 - \varphi} \right) .$$

Lorsque les séries désagrégées ne sont pas toutes (p.s) asymptotiquement stationnaires, on a $P(|\varphi| > 1) > 0$. On en déduit que $E \varphi^{2k} > P(|\varphi| > 1)$ et en particulier que $\sum_{k=0}^{\infty} (E \varphi^k)^2 = +\infty$.

PROPRIETE 5 :

Une condition nécessaire pour que la série agrégée soit asymptotiquement stationnaire est que presque toutes les séries désagrégées le soient.

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant cette condition n'est pas suffisante. Il est donc possible que la propriété de stationnarité soit perdue par agrégation.

2.C - CARACTERISATION DES SERIES AGREGÉES

Etant donnée une série $\left[X_t = \sum_{k=0}^t a_k \bar{\varepsilon}_{t-k}, t \in \mathbb{N} \right]$, on peut se demander dans quels cas elle peut être considérée comme provenant d'une agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1. Il faut pour cela chercher des conditions pour que a_k puisse s'écrire $a_k = E \varphi^k$. De telles conditions sont classiques.

PROPRIETE 6 :

La série $\left[X_t = \sum_{k=0}^t a_k \bar{\varepsilon}_{t-k}, t \in \mathbb{N} \right]$, est une série agrégée de processus auto regressifs d'ordre 1, si et seulement si on a :

$$\left| \forall n \forall \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i \alpha_j a_{i+j} \geq 0 \right.$$

Preuve : Voir [Choquet (1969), p. 279].

Cette condition correspond simplement à la positivité de la matrice de Toeplitz infinie :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & & \\ a_2 & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Elle est donc facile à vérifier en pratique à partir des mineurs principaux, puisqu'elle équivaut à :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_i \\ a_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_i & \dots & \dots & a_{2i} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall i \geq 0.$$

Ainsi la première contrainte effective est :

$$\det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = a_2 - a_1^2 = E \varphi^2 - (E \varphi)^2 \geq 0.$$

Il est clair que l'ensemble des sous-déterminants peut-être considéré comme une mesure vectorielle d'hétérogénéité des coefficients de régression au niveau désagrégé. La première composante étant identique à $V \varphi$.

De plus il est parfois possible de retrouver sans ambiguïté la loi du coefficient de regression φ .

PROPRIETE 7 :

Lorsque la condition de la propriété 6 est satisfaite, il existe une loi unique pour φ telle que $a_k = E \varphi^k$, $\forall k$ si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k s^k}{k!}$ est absolument convergente pour une valeur strictement positive s .

Preuve : Voir [Cramer (1945)].

On peut alors se demander dans quel cas cette loi ne charge que les valeurs φ avec $|\varphi| < 1$. Nous avons vu que si $P(|\varphi| > 1) > 0$, les coefficients $a_k = E \varphi^k$ ne tendent pas vers zero.

Inversement si $P(|\varphi| < 1) = 1$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : 1 - \eta > 0 : P(|\varphi| > 1 - \eta) < \varepsilon.$$

On a alors : $E|\varphi|^k < (1 - \eta)^k (1 - \varepsilon) + \varepsilon \quad \forall k$.

On en déduit : $\lim_{k \rightarrow \infty} E|\varphi|^k < \varepsilon$ et ceci étant valable pour toute valeur ε positive $\lim_{k \rightarrow \infty} E|\varphi|^k = 0$.

PROPRIETE 8 :

Lorsque la condition de la propriété 6 est satisfaite, les lois possibles de φ ne chargent que les valeurs $|\varphi| < 1$ si et seule-

ment si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Exemple 9 : A titre d'exemple considérons un processus autoregressif pur

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \bar{\varepsilon}_t, \quad t \geq 0, \quad \text{avec } X_{-1} = \dots = X_{-p} = 0.$$

Dans quels cas peut-il s'interpréter comme un agrégat d'autorégressifs

d'ordre 1 ? L'écriture moyenne mobile de ce processus est :

$$X_t = \sum_{k=0}^t \left(\sum_{l=1}^p \mu_l z_l^k \right) \bar{\varepsilon}_{t-k}, \quad \text{en appelant } z_l, \quad l = 1, \dots, p \text{ les}$$

inverses des racines (supposées distinctes) du polynôme

$$\phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p. \quad \text{La forme des coefficients moyennes-mobiles montre}$$

immédiatement que s'il s'agit d'un agrégat d'autorégressifs d'ordre 1, la

loi de φ est nécessairement discrète chargeant les valeurs z_l ,

$l = 1, \dots, p$ avec des poids μ_l , $l = 1, \dots, p$. L'interprétation en terme

d'agrégat est ainsi possible lorsque :

i) toutes les racines du polynôme autorégressif sont réelles,

ii) les solutions μ_l , $l = 1, \dots, p$ du système :

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^p \mu_l = 1 \\ \sum_{l=1}^p \mu_l z_l^k - \sum_{j=1}^k \varphi_j \sum_{l=1}^p \mu_l z_l^{k-j} = 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, p-1,$$

qui détermine sans ambiguïté les μ_l , sont toutes positives.

Ainsi pour un processus AR(2) ce système se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 - \varphi_1 (\mu_1 + \mu_2) = 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{z_2 - \varphi_1}{z_2 - z_1} \\ \mu_2 = \frac{\varphi_1 - z_1}{z_2 - z_1} \end{array} \right.$$

Désignant par z_2 la plus grande des inverses des deux racines, la condition est simplement : z_1, z_2 réelles telles que $z_2 > \varphi_1 > z_1$, avec au moins une inégalité stricte.

III - UN EXEMPLE D'AGREGATION

3.A - AGREGATION AVEC LOI BETA

Nous allons détailler les résultats du chapitre précédent lorsque la loi du coefficient de régression φ est une loi bêta transformée par homothétie :

$B(p, q; \alpha)$, $p > 0$, $q > 0$, $\alpha > 0$. Cette loi est continue sur $[0, \alpha]$,

de densité :

$$g(\varphi) = \frac{\varphi^{p-1} (1 - \varphi/\alpha)^{q-1}}{\alpha^p B(p, q)} \quad (\varphi) \quad , \quad \text{avec} \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad [0, \alpha]$$

Les moments de cette loi sont :

$$E(\varphi^k) = \alpha^k \frac{\Gamma(p+k) \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(p+q+k)} .$$

La représentation moyenne mobile du processus agrégé est donc :

$$X_t = \sum_{k=0}^t \frac{\Gamma(p+k) \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(p+q+k)} \alpha^k L^k \bar{\varepsilon}_t .$$

Introduisons le processus $\tilde{\varepsilon}_t = \begin{cases} \bar{\varepsilon}_t, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, on a :

$$X_t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+k)} \alpha^k L^k \right] \tilde{\varepsilon}_t,$$

$$X_t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+k)} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1)} \frac{\alpha^k L^k}{k!} \right] \tilde{\varepsilon}_t,$$

$$(9) \quad X_t = F[p; 1; p+q; \alpha L] \tilde{\varepsilon}_t,$$

où F désigne la fonction hypergéométrique [Abramowitz-Stegun (1970)].

On obtient ainsi par agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1, une classe de séries temporelles sur laquelle nous allons maintenant donner quelques éléments.

3.B - CLASSIFICATION DES SERIES AGREGÉES

i) Si $\alpha > 1$, nous savons que les séries désagrégées ne sont pas presque toutes stationnaires et la série agrégée est donc non stationnaire.

ii) Il nous reste à considérer le cas $\alpha \leq 1$.

D'après la formule de Stirling, on a : $\frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)} \approx k^{-q}$, lorsque k tend vers l'infini. Ceci permet d'obtenir un équivalent du coefficient moyenne mobile

$$a_k = E \varphi^k \approx \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \alpha^k k^{-q}.$$

On en déduit alors la classification suivante pour les séries agrégées :

VALEURS DES PARAMETRES		TYPE DE SERIE AGREGEE
$\alpha > 1$		non stationnaire
$\alpha = 1$	$q < \frac{1}{2}$	non stationnaire
	$\frac{1}{2} < q < 1$	stationnaire, mémoire longue
	$1 < q$	stationnaire, mémoire courte
$\alpha < 1$		stationnaire, mémoire courte

3.C - QUELQUES AGREGATS PARTICULIERS

Comme la moyenne d'une loi $B(p, q, 1)$ est égale à : $\frac{p}{p+q} = d$ et sa

variance à : $\frac{p q}{(p+q)^2 (p+q+1)}$, il est intéressant d'effectuer un changement

de paramètres pour ne faire apparaître que des paramètres facilement interprétables. Ainsi on pourrait retenir :

α donnant la valeur maximale des coefficients,

$d = \frac{p}{p+q}$ donnant la moyenne de la loi au paramètre d'homothétie près,

$\gamma = \frac{1}{p+q}$, qui permet de faire varier la variance de la loi à moyenne et coefficient d'homothétie donnés.

On voit alors que certains modèles classiques sont retrouvés comme cas particulier du modèle hypergéométrique (9) :

$$X_t = F[d/\gamma; 1; 1/\gamma; \alpha L] \approx \varepsilon_t.$$

i) Si $\gamma = 0$, c'est-à-dire si $p+q = +\infty$, la variance de φ est nulle et le modèle se réduit à un modèle autorégressif d'ordre 1 :

$$\bar{X}_t = [1 - d \alpha L]^{-1} \varepsilon_t.$$

Lorsque $\gamma = 0$, on ne peut évidemment identifier séparément les deux autres paramètres.

ii) Si $\gamma = p+q = 1$, ce qui implique $0 < p < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{X}_t &= F[p; 1; 1; \alpha L] \varepsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\alpha^k L^k}{k!} \varepsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-p(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} (-1)^k \alpha^k L^k \varepsilon_t, \end{aligned}$$

$$\bar{X}_t = (1 - \alpha L)^{-p} \varepsilon_t.$$

Le modèle obtenu est un autorégressif fractionnaire [voir Granger-Joyeux (1983), Mandelbrot-Van Ness (1968), Gonçalves (1987)...] :

$$(1 - \alpha L)^p \bar{X}_t = \varepsilon_t, \text{ avec } 0 < p < 1.$$

Si $\alpha = 1$, on retrouve en particulier le modèle ARIMA $(0, p, 0)$.

Ce modèle est non stationnaire si $\alpha = 1$ et $p = 1 - q > \frac{1}{2}$.

iii) Finalement remarquant que : $E \varphi = \alpha d$

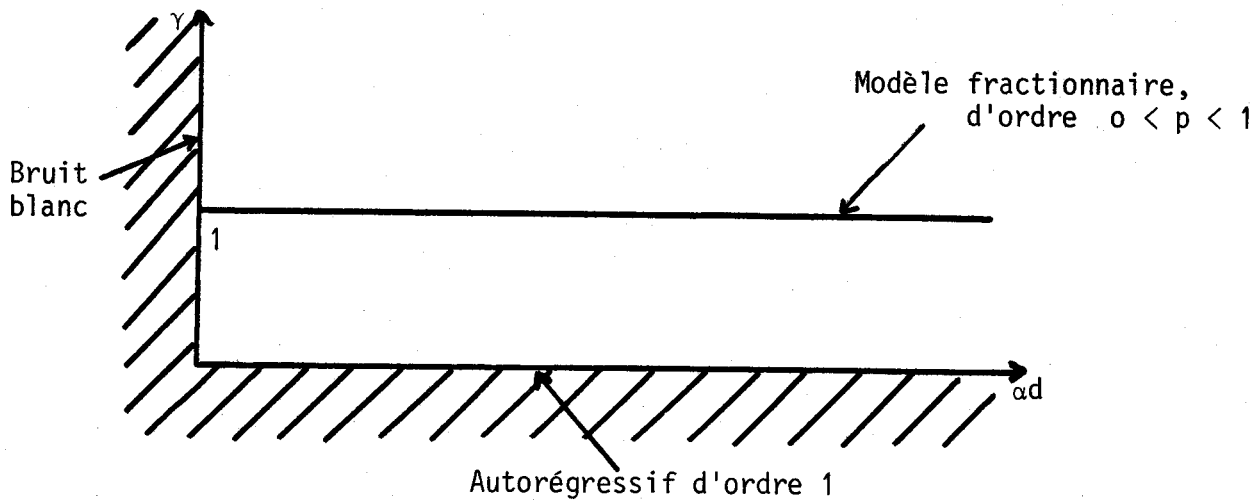
$$V \varphi = \alpha^2 d(1-d) \frac{\gamma}{1+\gamma},$$

on voit que $E \varphi = V \varphi = 0 \iff \alpha d = 0$.

Le cas limite du bruit blanc correspond donc à la contrainte : $\alpha d = 0$.

Dans l'espace $(\gamma, \alpha d)$ ces divers cas particuliers apparaissent de la façon

suivante :



3.D - AGREGATIONS SUCCESSIVES

Nous avons vu que par agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1, on obtenait un processus tel que :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} E(\varphi^k) \varepsilon_{t-k}.$$

En particulier, dès que la loi de φ est non dégénérée, on a $E \varphi^2 \neq (E \varphi)^2$ et le processus X n'a pas de représentation autorégressive d'ordre 1. La classe des processus $AR(1)$ ne possède donc aucune propriété de stabilité par agrégation.

On peut maintenant regarder si de telles propriétés peuvent dans certains cas exister pour les processus à représentation hypergéométrique.

La question s'écrit mathématiquement : existe-t-il une loi de probabilité pour p, q, α telle que :

$$E(F[p; 1; p+q; \alpha L])$$

soit de la forme $F[\bar{p}; 1; \bar{p}+\bar{q}; \bar{\alpha} L]$?

Si nous notons :

$$G(p, q, \alpha; x) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x \frac{\varphi^{p-1} (1 - \varphi/\alpha)^{q-1}}{\alpha^p} d\varphi, \quad 0 \leq x \leq \alpha,$$

on obtient en intégrant par parties :

$$G(p, q, \alpha; x) = \frac{p}{p+q} G(p+1, q, \alpha; x) + \frac{q}{p+q} G(p, q+1, \alpha; x).$$

Cette relation montre qu'étant donnés des processus hypergéométriques :

$X_{jt} = F(p_j; 1; p_j + q_j; \alpha L) \varepsilon_t^*$, $j = 1, \dots, J$ avec $p_j + q_j = \delta$ indépendant de j et $p_{j+1} = p_j + 1$, on peut trouver des poids β_j , $j = 1, \dots, J$ de

façon que le processus agrégé $\sum_{j=1}^J \beta_j X_{jt}$ admette aussi une représentation hypergéométrique de paramètres $\bar{p} = \min_j p_j$, $\bar{p} + \bar{q} = \delta$, $\bar{\alpha} = \alpha$.

IV - ETUDE DES CORRELATIONS

4.A - ACCROISSEMENT DES CORRELATIONS

Nous avons vu que la procédure d'agrégation avait pour effet d'augmenter l'ordre des retards et de faire se "rapprocher" la représentation de la non stationnarité. De tels effets devraient également se retrouver au niveau de la fonction d'autocorrélation.

Au niveau désagrégé la fonction d'autocorrélation est :

$$\rho_i(h) = \varphi_i^h, \quad i = 1, 2, \dots, \quad h = 0, 1, \dots$$

et donc la moyenne de ces fonctions d'autocorrélation est :

$$(10) \quad \bar{\rho}(h) = E \varphi^h, \quad h = 0, 1, \dots$$

Calculons maintenant la fonction d'autocorrélation associée à la série agrégée.

Ce calcul est possible lorsque cette série est stationnaire ce que nous supposons. On obtient :

$$(11) \quad \bar{\rho}(h) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} E(\varphi^k) E(\varphi^{k+h})}{\sum_{k=0}^{\infty} [E(\varphi^k)]^2}, \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Si la loi du coefficient de régression charge uniquement les réels positifs les fonctions $\varphi \rightarrow \varphi^k$, $k \geq 0$ et $\varphi \rightarrow \varphi^h$, $h \geq 0$ sont croissantes et donc :

$$\text{Cov}(\varphi^k, \varphi^h) = E(\varphi^{k+h}) - E(\varphi^k) E(\varphi^h) \geq 0.$$

On en déduit que :

$$\bar{\rho}(h) \geq E \varphi^h = \bar{\rho}(h).$$

PROPRIETE 12 :

Si la loi de φ charge les valeurs positives, les corrélations au niveau agrégé sont supérieures aux moyennes des corrélations desagrégées.

4.B - CAS DES PROCESSUS FRACTIONNAIRES

Considérons par exemple une distribution d'hétérogénéité de type $B(p, q; \alpha)$ avec $p+q = 1$, qui correspond à un processus agrégé satisfaisant :

$$(1 - \alpha L)^p \bar{X}_t = \varepsilon_t.$$

$$\text{Nous avons : } E \varphi^k = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{k!} \alpha^k.$$

D'autre part, les moments croisés du processus agrégé se calculent à partir des sommes :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} E(\varphi^k) E(\varphi^{k+h}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+k+h)}{\Gamma(p)} \frac{\alpha^{2k+h}}{k! (k+h)!} \\
 &= \alpha^h \frac{\Gamma(p+h)}{\Gamma(p) \Gamma(h+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+k+h)}{\Gamma(p+h)} \frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(k+h+1)} \frac{\alpha^{2k}}{k!} \\
 &= \alpha^h \frac{\Gamma(p+h)}{\Gamma(p) \Gamma(h+1)} F[p, p+h, h+1; \alpha^2] .
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\tilde{\varrho}(h)}{\bar{\varrho}(h)} = \frac{\alpha^h \Gamma(p+h)}{\Gamma(p) \Gamma(h+1)} \frac{F[p, p+h, h+1; \alpha^2]}{F[p, p, 1; \alpha^2]} ,$$

C'est-à-dire :

$$(13) \quad \frac{\tilde{\varrho}(h)}{\bar{\varrho}(h)} = \frac{F[p, p+h, h+1; \alpha^2]}{F[p, p, 1; \alpha^2]} .$$

Ce rapport est comme nous l'avons vu auparavant supérieur à 1 .

On peut d'ailleurs remarquer que :

$$\frac{\tilde{\varrho}(h)}{\bar{\varrho}(h)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(h) \alpha^{2k}$$

$$\text{et que : } \frac{\beta_k(h+1)}{\beta_k(h)} = \frac{p+k+h}{p+h} \frac{h+1}{k+h+1} > 1 , \text{ car } p < 1 .$$

On en déduit que le rapport $\frac{\tilde{\varrho}(h)}{\bar{\varrho}(h)}$ est fonction croissante de h .

D'autre part, utilisant l'équivalence asymptotique :

$$F[a, b+\lambda, c+\lambda, z] \approx \frac{1}{(1-z)^a}, \text{ si } |z| < 1 \text{ et si } \lambda \text{ tend vers l'infini,}$$

on voit que ce rapport est asymptotiquement donné par :

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\bar{q}(h)}{\bar{q}(h)} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^p F(p, p, 1; \alpha^2)}.$$

V - TEST DE L'HYPOTHESE D'HOMOGENEITE

5.A - DERIVATION DE LA STATISTIQUE DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

Plaçons nous de nouveau dans le cas d'une agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1 effectuée selon une loi bêta. Nous avons vu que la série agrégée satisfait une représentation hypergéométrique :

$$X_t = F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; \alpha L\right) \varepsilon_t,$$

où γ est un paramètre positif directement lié à la variance du coefficient d'autorégression. Dans ce paragraphe, on se propose de développer un test d'homogénéité, c'est-à-dire un test de l'hypothèse nulle $H_0 = \langle \gamma=0 \rangle$ contre l'alternative $H_1 = \langle \gamma > 0 \rangle$. Nous avons noté précédemment que sous l'hypothèse d'homogénéité le paramètre α n'est pas identifiable ; afin de résoudre cette difficulté, nous développons le test sous la contrainte $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour le modèle : $X_t = F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right) \varepsilon_t$. On suppose de plus les composantes du bruit indépendantes de même loi.

Nous fondons le test sur le principe du multiplicateur de Lagrange. Notant $\Phi_{d,\gamma}(L) X_t = \varepsilon_t$ la forme autorégressive du processus, la statistique du multiplicateur de Lagrange fait intervenir l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres calculé sous l'hypothèse nulle :

$$\hat{d}_T^0 = \frac{\sum_{t=2}^T \bar{X}_t \bar{X}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \bar{X}_{t-1}^2} \quad (\text{puisque sous } H_0, d \text{ est le coefficient d'un autorégressif d'ordre 1}).$$

$$\hat{\gamma}_T^0 = 0, \quad \hat{\sigma}_T^{02} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\bar{X}_t - \hat{d}_T^0 \bar{X}_{t-1})^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{\varepsilon}_t^0)^2,$$

où $\hat{\varepsilon}_t^0$ désigne le résidu sous l'hypothèse nulle.

Elle s'exprime alors en fonction des scores estimés sous contraintes :

$$Z_{1t} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial d_{T,0}}(L) \tilde{X}_t}{\partial d} \quad \text{et} \quad Z_{2t} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{T,0}}(L) \tilde{X}_t}{\partial \gamma},$$

où $\tilde{X}_t = \bar{X}_t$, si $t > 1$, $\tilde{X}_t = 0$ sinon. Elle est donné par [voir

1 :

$$(15) \quad \varepsilon_{L.M} = \frac{1}{\hat{\sigma}_T^{02}} \left[\sum_{t=1}^T Z_{2t} \tilde{\varepsilon}_t^0 \right]^2 / \left[\sum_{t=2}^T Z_{2t}^2 - \frac{\left[\sum_{t=1}^T Z_{2t} Z_{1t} \right]^2}{\sum_{t=2}^T Z_{1t}^2} \right]$$

et suit asymptotiquement sous l'hypothèse d'homogénéité une loi du khi-deux à un degré de liberté.

Il nous reste à expliciter la forme des scores.

1) On a :

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial d, \gamma}(L)}{\partial d} = - \frac{\frac{\partial}{\partial d} F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)}{F^2\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)}.$$

Le terme général du développement en série de la fonction hypergéométrique

$F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)$ est :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} L^i.$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial d} \log \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} = \frac{1}{\gamma} \left[\Psi\left(\frac{d}{\gamma} + i\right) - \Psi\left(\frac{d}{\gamma}\right) \right],$$

où $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ est la fonction digamma. Utilisant les propriétés de la fonction digamma [Abramowitz - Stegun (1965) 6.3.6], on a :

$$\frac{\partial}{\partial d} \left[\log \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} \right] = \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\frac{d}{\gamma} + j} \right] = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{d + j\gamma}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} L^i \right] = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{d + j\gamma} L^i.$$

On en déduit la forme du score relatif à d , évalué en $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{d,0}(L)}{\partial d} &= - (1 - dL)^2 \sum_{i=1}^{\infty} i d^{i-1} L^i \\ &= - (1 - dL)^2 \frac{L}{(1 - dL)^2} = - L. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$(16) \quad Z_{1t} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial d}{}^0(L)}{\partial d} \tilde{X}_t = - \tilde{X}_{t-1} .$$

ii) Calculons de même l'autre composante du vecteur des scores. Après calcul (voir annexe), on trouve :

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \gamma}{}^0(L)}{\partial \gamma} = d(d-1) \frac{L^2}{1 - dL} .$$

La variable Z_{2t} est donc :

$$Z_{2t} = \hat{d}_T^0 (\hat{d}_T^0 - 1) \frac{L^2}{1 - \hat{d}_T^0 L} \tilde{X}_t ,$$

$$Z_{2t} = \hat{d}_T^0 (\hat{d}_T^0 - 1) (1 - \hat{d}_T^0 L)^{-1} \tilde{X}_{t-2} .$$

iii) La statistique du multiplicateur de Lagrange s'écrit finalement :

$$(17) \quad \varepsilon_{L.M} = \frac{1}{\hat{\sigma}_T^2} \frac{\left[\sum_{t=1}^T (1 - \hat{d}_T^0 L)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \cdot \tilde{\varepsilon}_t \right]^2}{\sum_{t=1}^T \left[(1 - \hat{d}_T^0 L)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \right]^2 - \left[\sum_{t=1}^T (1 - \hat{d}_T^0 L)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \cdot \tilde{X}_{t-1} \right]^2 / \sum_{t=1}^T \tilde{X}_{t-1}^2}$$

5.B - UNE STATISTIQUE DE TEST ASYMPTOTIQUEMENT EQUIVALENTE

Une autre forme de cette statistique équivalente sous l'hypothèse nulle s'en déduit en approchant le dénominateur. On a après calcul :

$$\sum_{t=1}^T \left[(1 - \hat{\alpha}_T^0)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \right]^2 \approx T \hat{\sigma}_T^{o2} \frac{1 + \hat{\alpha}_T^{o2}}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^3} .$$

$$\sum_{t=2}^T \tilde{X}_{t-1} (1 - \hat{\alpha}_T^0)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \approx T \hat{\sigma}_T^{o2} \frac{\hat{\alpha}_T^0}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^2}$$

$$\sum_{t=2}^T \tilde{X}_{t-1}^2 \approx T \frac{\hat{\sigma}_T^{o2}}{1 - \hat{\alpha}_T^{o2}} .$$

Le dénominateur peut donc être approché par :

$$T \hat{\sigma}_T^{o2} \frac{1 + \hat{\alpha}_T^{o2}}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^3} = \frac{T^2 \hat{\sigma}_T^{o4} \hat{\alpha}_T^{o2} (1 - \hat{\alpha}_T^{o2})}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^4 T \hat{\sigma}_T^{o2}}$$

$$= T \frac{\hat{\sigma}_T^{o2}}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^3} [1 + \hat{\alpha}_T^{o2} - \hat{\alpha}_T^{o2}] = \frac{T \hat{\sigma}_T^{o2}}{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^3} .$$

Une statistique équivalente à $\epsilon_{L.M}$ sous l'hypothèse nulle est donc :

$$(18) \quad \epsilon_{L.M}^* = \frac{(1 - \hat{\alpha}_T^{o2})^3}{\hat{\sigma}_T^{o4}} \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T (1 - \hat{\alpha}_T^0)^{-1} \tilde{X}_{t-2} \cdot \tilde{\epsilon}_t \right]^2$$

5.C - L'ASPECT UNILATERAL DU TEST

Les statistiques que nous venons de calculer sont celles habituellement utilisée dans le cas d'un test bilatéral de $H_0^* = \langle \gamma = 0 \rangle$ contre

$H_1 = \langle \gamma \neq 0 \rangle$. Dans notre application il faut tenir compte de l'aspect unilatéral du test. Ceci conduit à modifier les statistiques de test en prenant :

$$(19) \quad T_{LM} = s \sqrt{\epsilon_{LM}} \quad \text{et} \quad T_{LM}^* = s \sqrt{\epsilon_{LM}^*}, \quad \text{où } s \text{ désigne le}$$

signe de $\sum_{t=1}^T (1 - \hat{\alpha}_T^0)^{-1} X_{t-2} \cdot \epsilon_t^{\approx 0}$. Ainsi on a :

$$T_{LM}^* = \frac{(1 - \hat{\alpha}_T^{02})^{3/2}}{\hat{\sigma}_T^{02}} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (1 - \hat{\alpha}_T^0)^{-1} X_{t-2} \cdot \epsilon_t^{\approx 0}.$$

Ces deux statistiques ont asymptotiquement une loi normale centrée réduite sous l'hypothèse nulle $H_0 = \langle \gamma = 0 \rangle$.

Nous allons maintenant étudier leur comportement sous une suite d'alternatives locales du type $H_{1T} = \left\{ \gamma = \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \right\}$, avec $\gamma_0 > 0$.

Pour cette suite le modèle initial :

$$\frac{1}{F\left(\frac{d}{\gamma_T}; 1; \frac{1}{\gamma_T}; \alpha L\right)} X_t = \phi_{d,\gamma}^{(L)} X_t = \epsilon_t^{\approx},$$

peut être approché par :

$$\left(\phi_{d,0}^{(L)} + \frac{\partial \phi_{d,0}^{(L)}}{\partial \gamma} \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \right) X_t = \epsilon_t^{\approx},$$

ou par :

$$\bar{X}_t = \left(\frac{1}{\phi_{d,0}^{(L)}} - \frac{\frac{\partial \phi_{d,0}^{(L)}}{\partial \gamma}}{\phi_{d,0}^{(L)2}} - \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \right) \varepsilon_t,$$

$$\langle \implies \rangle \quad \bar{X}_t = \left[(1 - dL)^{-1} + d(1-d)L^2 (1 - dL)^{-3} \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \right] \varepsilon_t$$

$$\langle \implies \rangle \quad \bar{X}_t - d \bar{X}_{t-1} = \varepsilon_t + \frac{d(1-d)L^2}{(1-dL)^2} \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \varepsilon_t.$$

Sous cette suite d'alternatives locales, l'estimateur contraint du paramètre d peut être approché par :

$$\begin{aligned} \hat{d}_T^0 &= \frac{\sum_t \bar{X}_t \bar{X}_{t-1}}{\sum_t \bar{X}_{t-1}^2} \\ &= d + \frac{\frac{1}{T} \sum_t \left(\varepsilon_t + \frac{d(1-d)L^2}{(1-dL)^2} \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \varepsilon_t \right) \bar{X}_{t-1}}{\frac{1}{T} \sum_t \bar{X}_{t-1}^2} + o_p(1) \\ &= d + o_p(1). \end{aligned}$$

Le numérateur de la statistique T_{LM} ou T_{LM}^* peut être approché par :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (1 - \hat{d}_T^0 L)^{-1} \bar{X}_{t-2} \varepsilon_t \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (1 - dL)^{-1} \bar{X}_{t-2} (\bar{X}_t - d \bar{X}_{t-1}) + o_p(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (1-dL)^{-1} X_{t-2} \left(\varepsilon_t + \frac{d(1-d)}{(1-dL)^2} \frac{\gamma_0}{\sqrt{T}} \varepsilon_{t-2} \right) + o_P(1) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (1-dL)^{-1} X_{t-2} \gamma_0 \frac{d(1-d)}{(1-dL)^2} \varepsilon_{t-2} + o_P(1),
\end{aligned}$$

(car ε_t est indépendant des valeurs X_{t-2}, X_{t-3}, \dots).

Ne conservant que le terme d'ordre supérieur dans l'écriture de X_{t-2} , on voit que le numérateur est pour la suite d'alternatives locales équivalent à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (1-dL)^{-2} \varepsilon_{t-2} \gamma_0 \frac{d(1-d)}{(1-dL)^2} \varepsilon_{t-2} + o_P(1) \\
&= \gamma_0 d(1-d) V((1-dL)^{-2} \varepsilon_{t-2}).
\end{aligned}$$

Comme $\gamma_0 > 0$ et que $0 < d < 1$ le numérateur converge donc vers une constante positive.

La région critique du test unilatéral est donc de la forme :

$$W_T = \left\{ T_{LM} > c \right\} \quad \text{ou} \quad W_T^* = \left\{ T_{LM}^* > c \right\},$$

où c est déterminée par la condition asymptotique sur le risque de première espèce. Si ce risque est fixé à α_0 , on doit avoir : $\lim_T P(W_T) = \alpha_0$
 $\Leftrightarrow 1 - u(c) = \alpha_0 \Leftrightarrow c = u^{-1}(1 - \alpha_0)$, où u désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

PROPRIETE 20 :

Le test du multiplicateur de Lagrange au seuil α_0 de l'hypothèse d'homogénéité dans la cadre d'un modèle hypergéométrique consiste à :
 accepter l'hypothèse d'homogénéité si :

$$T_{LM} < u^{-1}(1-\alpha_0) \quad \left[\text{ou si } T_{LM}^* < u^{-1}(1-\alpha_0) \right],$$

à la refuser dans le cas contraire.

5.D - BIAIS D'HETEROGENEITE

Finalement, on peut se demander quelles seraient les propriétés des estimateurs contraints par l'hypothèse d'homogénéité, lorsque celle-ci n'est pas satisfaite.

L'estimateur contraint du paramètre d est comme nous l'avons vu donné par :

$$\hat{d}_T^0 = \frac{\sum_t \bar{x}_t \bar{x}_{t-1}}{\sum_t \bar{x}_t^2};$$

et il converge donc vers la corrélation théorique à l'ordre 1 du processus \bar{X} , c'est-à-dire vers $\tilde{\rho}(1)$.

On a vu d'autre part dans la propriété 12 que $\tilde{\rho}(1) > E \psi$.

Comme d s'interprète justement comme la moyenne de ψ , on en déduit l'existence d'un biais positif d'hétérogénéité.

PROPRIETE 21 :

L'estimateur du maximum de vraisemblance de d calculé sous l'hypothèse d'homogénéité est biaisé, lorsqu'il y a hétérogénéité, ce biais est toujours positif.

Ainsi l'oubli de l'hétérogénéité conduit à une surestimation systématique de ce coefficient.

Ce biais peut être explicité en fonction des paramètres. On a :

$$\hat{\rho}(1) - d = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i a_{i+1} - d \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2}, \text{ où } a_i \text{ désigne le } i^{\text{e}} \text{ coefficient}$$

du développement moyenne mobile de \bar{X} , c'est-à-dire :

$$a_i = \frac{r\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{r\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{r\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{r\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)}.$$

$$\text{Comme : } a_{i+1} = \frac{\frac{d}{\gamma} + i + 1}{\frac{1}{\gamma} + i + 1} a_i, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(1) - d &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i (a_{i+1} - d a_i)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2} \\ &= \frac{(1-d) \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \frac{i}{\frac{1}{\gamma} + i}}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2}. \end{aligned}$$

On voit que ce biais est une fonction décroissante de $1 - d$ et donc le biais tend à s'annuler, lorsqu'on se rapproche de la non stationnarité.

ANNEXE

DERIVEE DE $\phi_{d,\gamma}(L)$ PAR RAPPORT A γ EN $\gamma = 0$

On a :

$$\phi_{d,\gamma}(L) = \frac{1}{F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \quad \text{et} \quad \phi_{d,0}(L) = (1 - dL).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{d,\gamma}(L) - \phi_{d,0}(L)}{\gamma} &= \frac{\frac{1}{F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} - (1 - dL)}{\gamma} \\ &= \frac{1 - F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right) + dL F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)}{\gamma F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \\ &= \frac{- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} L^i + dL \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} L^i}{\gamma F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left[d \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i - 1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma} + i\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + i\right)} \right] L^i}{\gamma F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r\left(\frac{d}{\gamma} + i - 1\right)}{r\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{r\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{r\left(\frac{1}{\gamma} + i - 1\right)} \left[d - \frac{\frac{d}{\gamma} + i - 1}{\frac{1}{\gamma} + i - 1} \right] L^i \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r\left(\frac{d}{\gamma} + i - 1\right)}{r\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{r\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{r\left(\frac{1}{\gamma} + i - 1\right)} \left[d - \frac{\frac{d}{\gamma} + i - 1}{\frac{1}{\gamma} + i - 1} \right] L^i}{\gamma F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r\left(\frac{d}{\gamma} + i - 1\right)}{r\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{r\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{r\left(\frac{1}{\gamma} + i - 1\right)} \frac{(i-1)(d-1)}{\frac{1}{\gamma} + i - 1} L^i}{\gamma F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} \\
&= (d-1) \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r\left(\frac{d}{\gamma} + i - 1\right)}{r\left(\frac{d}{\gamma}\right)} \frac{r\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{r\left(\frac{1}{\gamma} + i - 1\right)} \frac{i-1}{1 + \gamma(i-1)} L^i}{F\left(\frac{d}{\gamma}; 1; \frac{1}{\gamma}; L\right)} .
\end{aligned}$$

Faisant tendre γ vers zéro, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_{d,0}^{(L)}}{\partial \gamma} &= (d-1) (1-dL) \sum_{i=1}^{\infty} d^{i-1} (i-1) L^i \\
&= (d-1) (1-dL) \frac{d L^2}{(1-dL)^2} \\
&= \frac{d(d-1) L^2}{1-dL} .
\end{aligned}$$

REFERENCES

- Abramowitz, M. et I., Stegun (1965) : Handbook of Mathematical functions, Dover.
- Choquet, G. (1969) : Lectures on Analysis, Vol. II, Representation theory, W.A. Benjamin, Inc., New-York.
- Cramer, H. (1945) : Mathematical methods of statistics, Princeton University Press.
- Gonçalves, E. (1987) : Une généralisation des processus ARMA, Annales d'Economie et de Statistique, 5, 109-146.
- Granger, C. (1980) : Long memory relationships and the aggregation of dynamic models, Journal of Econometrics, 14, 227-238.
- Granger, C. et R., Joyeux (1980) : An introduction to long memory time series and fractional differencing, Journal of Time Series Analysis, 1.