ACCES ASYMETRIQUE DES AGENTS ECONOMIQUES A DES MARCHES INCOMPLETS

Y. YOUNES

Février 1 9 8 7

N° 8709

ACCES ASYMETRIQUE DES AGENTS ECONOMIQUES A DES MARCHES INCOMPLETS

R E S U M E

Quand les agents ont un accès asymétrique à une structure des marchés par ailleurs incomplète, l'utilisation de l'approche habituelle ne permet pas de déduire des hypothèses classiques, les propriétés requises de la demande aux limites ainsi que celles de la matrice de Slutzsky. Les méthodes développées dans cette étude permettent de résoudre ces difficultés, dans le cas où la structure des marchés est supposée régulière.

Journal of Economic Literature 020

Mots clefs : - Paniers de biens
- Structures Générales de Marché
- Accès asymétrique

ASYMMETRIC PARTICIPATION OF ECONOMIC AGENTS TO MARKET STRUCTURES

A B S T R A C T

When economic agents have an asymmetric access to an incomplete market structure, the usual methodes not allow to deduce from classical assumptions the required properties of the demand functions near the boundary and that of the Slutzsky matrix. With the methods which are presented in this study, it is possible to solve these problems, when the market structure is assumed to be regular.

Key words : - Commodity Bundles
- General Market Structures
- Asymmetric Participation

ACCES ASYMETRIQUE DES AGENTS ECONOMIQUES A DES MARCHES INCOMPLETS*

Y. Younès

Février 1 9 8 7

Les démonstrations générales d'existence d'un équilibre concurrentiel supposent que deux conditions fondamentales soient satisfaites, à savoir la continuité de la fonction de demande et le comportement aux limites de cette même fonction (quand tous les biens sont désirés, la norme de la demande tend vers l'infini quand le prix de l'un des biens tend vers zero). Ces deux conditions posent problème quand on suppose que la structure des marchés est incomplète.

D'une part, après la contribution fondamentale de R. Radner (1972), O. Hart (1975) a construit un exemple simple d'inexistence d'un équilibre concurrentiel, inexistence dûe à une discontinuité de la fonction de demande. En effet, il peut arriver que quand le vecteur prix varie, les sous-espaces vectoriels (non plus nécessairement les hyperplans) dans lesquels chaque consommateur choisit son vecteur d'échange net n'ont pas tous la même dimension.

Pour surmonter cette première difficulté, certains auteurs ont restreint l'analyse au cas des structures de marchés pour lesquelles, quel que soit le vecteur des prix, ces sous-espaces ont la même dimension. On dira que ces structures de marché sont régulières. C'est l'approche retenue par J. Werner (1985), D. Cass (1984) et D. Duffie (1985) quand les titres sont financiers. Dans le cas où les titres donnent des rendements evalués en biens, voir S. Chae (1985), par exemple.

D'autres auteurs ont au contraire cherché à affronter directement la difficulté des diminutions de dimension des espaces vectoriels pour un "petit" ensemble de vecteurs de prix. Dans le cas où les espaces vectoriels sont presque toujours des hyperplans, il est possible d'utiliser la notion classique d'équilibre concurrentiel walrasien pour obtenir l'existence générique. C'est la conclusion que l'on peut tirer des travaux de D. Mac Manus (1984), R. Repullo (1983) et M. Magill et W. Shafer (1985). Cependant, on peut dire que c'est D. Duffie et W. Shafer (1985) qui, utilisant une notion de pseudo equilibre - qui est génériquement un équilibre - et la notion de la variété de tous les sous-espaces d'une dimension donnée de R^r , ont réglé la première difficulté dûe aux variations de la dimension des sous-espaces vectoriels. (Voir aussi à ce sujet H. Polemarchakis (1986)).

La seconde difficulté tient essentiellement au fait qu'un vecteur de prix ne peut caractériser de manière univoque qu'un hyperplan et non pas un sous-espace de dimension inférieure à celle d'un hyperplan. La principale conséquence en est que la propriété habituelle du comportement aux limites de la demande, quand tous les biens sont désirés, ne tient plus. Jusqu'à présent, l'approche différentielle au problème des marchés incomplets étant basée sur une méthode dûe à David Cass (1985) et qui consiste à raisonner comme si l'un des agents avait accès à une structure complète des marchés, c'est-à-dire comme s'il choisissait son vecteur des échanges nets dans un hyperplan. Remarquons que cette méthode, pour laquelle la notion de vecteur de prix est encore utilisée, ne permet l'analyse du nombre d'équilibres que si l'on distingue entre allocation et prix car le même sous-espace vectoriel peut être contenu dans une infinité d'hyperplans. De ce point de vue, il a été montré que quand les titres sont financiers, l'ensemble des allocations associées à une même économie a, en général, la puissance du continu (Y. Balasko et D. Cass (1986), J. Geneakoplos et A. Mas Colell (1985) et H. Polemarchakis (1986)). Au contraire, quand les titres sont réels, l'ensemble des allocations associées à une même économie est, en général, fini. Cependant, quand les agents ont des accès différents aux divers marchés, la méthode de D. Cass ne peut plus être utilisée que la structure de marché soit régulière ou non.

L'objectif de ce papier est d'appliquer, au cas de la participation asymétrique, les méthodes d'analyse développées dans Y. Younès (1986) et qui permettent d'une part de raisonner dans un cadre plus général que celui du modèle canonique avec marchés au comptant et marchés des titres et d'autre part de mener l'analyse sans recours à la méthode de D. Cass. En quelques mots, la notion de vecteur de prix des biens doit être remplacée ou bien par celle de rapport d'échange entre paniers de biens ou bien par celle de système de prix des biens (plusieurs vecteurs de prix des biens). Dans le cas où la structure des marchés est régulière, il est possible de se passer de la notion de système de prix des biens-dont l'utilisation s'impose quand il y a des diminutions de dimension des espaces vectoriels - et de raisonner exclusivement à l'aide des prix des paniers de biens. Le comportement de la demande aux limites et les propriétés usuelles de la matrice de Slutzky s'obtiennent alors de manière très simple.

C'est l'optique que nous adopterons dans ce travail car nous supposerons que la structure de marché générale est régulière. Dans cette étude, il sera admis que tous les biens sont strictement désirés. Cependant, il est possible, en transposant les raisonnements présentés dans Y. Younès (1986) pour le cas de la participation symétrique, de réduire le modèle où il existe aussi des unités de compte ou des monnaies internes au cas où tous les biens sont désirés. Signalons que le modèle avec titres financiers, participation asymétrique et structure de marché régulière est étudié indépendamment par Y. Balasko, D. Cass et P. Siconolfi (1987) avec des instruments développés dans Y. Balasko et D. Cass (1985).

Avant d'indiquer le plan de notre démarche, insistons sur une limitation importante de l'analyse. Les raisons fondamentales de l'incomplétude de la structure des marchés et de l'asymétrie de l'accès aux marchés ne sont pas analysées.[1]

Cette étude comprend deux parties. La première est consacrée à la définition générale de la notion de structure de marchés et aux hypothèses retenues. Dans la deuxième partie, après avoir caractérisé le comportement du consommateur, nous montrons qu'il existe toujours un équilibre concurrentiel sous les hypothèses faites, que l'ensemble des équilibres - quand le vecteur des ressources initiales est paramétrisé - est une variété différentielle et que pour presque chaque économie, l'ensemble des équilibres est fini.[2]

I

Soit r le nombre de biens au sens de Arrow-Debreu. L'espace des biens est donc R^r. Il y a m consommateurs i. Chaque consommateur i est défini par le doublet $\{\tilde{u}_i , w_i\}$ où $\tilde{u}_i$ est la fonction d'utilité $\tilde{u}_i : \mathbb{R}^r_+ \to \mathbb{R}$ et w_i est le vecteur des ressources initiales. L'hypothèse suivante est fondamentale :

H 1 : $\tilde{u}_i$ est différentiable trois fois, strictement quasi-concave et strictement croissante. La fermeture des hypersurfaces d'indifférence appartient à R^r_{++}. Finalement $w_i \in \mathbb{R}^r_{++}$.

Formellement, notons u_i le gradient de $\tilde{u}_i$ et U la matrice des dérivées secondes. Alors

$$z'U\, z < 0 \quad \text{pour} \quad z \in \{z \in \mathbb{R}^r \mid u'.z = 0\}$$

où " ' " indique l'opération de transposition.

Une structure de marchés est défini comme la donnée de N sous-espaces vectoriels(3), Z^β, de $\mathbb{R}^r$. Formellement :

$$M = [Z^1 ,\dots, Z^\beta,\dots, Z^N]$$

M contraint les actes des agents en ce sens que l'échange net, z_i, de chaque agent i doit pouvoir s'écrire

$$z_i = \sum_\beta z_i^\beta \quad \text{avec} \quad z_i^\beta \in Z^\beta \,,\ \forall\beta .$$

Soit $\tilde{T}^\beta \equiv [\tilde{t}^\beta_1,..,\tilde{t}^\beta_k,..,\tilde{t}^\beta_{n(\beta)}]$ une base de Z^β. Définissons

$$\tilde{T} \equiv [\tilde{T}^1 ,\dots, \tilde{T}^\beta ,\dots, \tilde{T}^N]$$

Un vecteur colonne k de $\tilde{T}$ peut être interprété comme un panier de biens k . Sur chaque marché β , les paniers de biens de $\tilde{T}^{\beta}$ s'échangent les uns contre les autres au vecteur des prix $\tilde{\pi}^{\beta} = [\tilde{\pi}_1^{\beta} ,.., \tilde{\pi}_k^{\beta} ,.., \tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta}]$

Soit $\tilde{a}_i^{\beta}$ le vecteur des échanges nets de i, en paniers de biens. On a donc simultanément, pour tout β :

$$z_i^{\beta} = \tilde{T}^{\beta} \; \tilde{a}_i^{\beta}$$

$$\text{et} \qquad \tilde{\pi}'^{\beta}.\tilde{a}_i^{\beta} = 0$$

La dernière relation est donc la contrainte budgétaire afférente au marché β . L'hypothèse H 1 nous permet d'écrire que, sur chaque marché β , le dernier vecteur colonne de T^{β} s'échange contre chacun des $n(\beta)$ premiers paniers au taux de $\pi_k^{\beta} = \tilde{\pi}_k^{\beta}$ pour $k = 1,., n(\beta)-1$, si l'on a posé $\tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta} = 1$

Pour chaque marché β , les équations précédentes peuvent donc être écrites (en notant $\pi^{\beta} = [\tilde{\pi}_1^{\beta} ,...., \tilde{\pi}_{n(\beta)-1}^{\beta}]$).

$$T^{\beta}(\pi^{\beta}) \; a_i^{\beta} = z_i^{\beta}$$

où $a_i^{\beta} = [\tilde{a}_1^{\beta} ,.., \tilde{a}_{n(\beta)-1}^{\beta}]$

et $T^{\beta}(\pi^{\beta}) \equiv [\tilde{t}_1^{\beta} - \pi_1^{\beta} \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta} ,...., \tilde{t}_{n(\beta)-1}^{\beta} - \pi_{n(\beta)-1}^{\beta} \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}] \equiv \Lambda^{\beta+} - \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}.\pi'^{\beta}$

$$\equiv \Lambda^{\beta+} - \Lambda^{\beta-}[\pi^{\beta}]$$

où $\Lambda^{\beta+} = [\tilde{t}_1^{\beta} ,..., \tilde{t}_{n(\beta)-1}^{\beta}]$ $\Lambda^{\beta-} = [\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta} ,..., \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}]$ et $[\pi^{\beta}]$ est la matrice diagonale formée des éléments de π^{β} .

L'hypothèse suivante est cardinale car elle assure que, étant donné H 1 , le panier de biens $\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}$ peut jouer le rôle de numéraire et donc que $\tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta} > 0$ (voir Y. Younès (1986).

H 2 : Pour chaque β, il existe une base de Z^{β} , $\tilde{T}^{\beta} \equiv [\tilde{t}_1^{\beta} ,..., \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}]$, telle que $\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}$ ne contienne pas d'éléments négatifs.

Posons :

$$\Lambda^{+} = [\Lambda^{1+}, \ldots, \Lambda^{N+}] \quad \text{et} \quad \Lambda^{-} = [\Lambda^{1-}, \ldots, \Lambda^{N-}]$$

et s'écrit $[\pi]$ la matrice diagonale formée des éléments du vecteur $\pi' = [\pi^{1'}, \ldots, \pi^{\beta}, \ldots, \pi^{N'}]$.

Les matrices Λ^{+} et Λ^{-} sont $r \times n$. Une structure de marché sera donc défini par la donnée de $\Lambda = \{\Lambda^{+}, \Lambda^{-}\}$.

Le couple formé par la colonne α de Λ^{+} et la colonne α de Λ^{-} sera appelé le marché simple α. Il y a donc n marchés simples.[4]

De plus, définissons

$$T(\pi) = \Lambda^{+} - \Lambda^{-}[\pi]$$

L'hypothèse H 1 nous permet d'écrire (sans perte de généralité car il est toujours possible d'éliminer des paniers de biens) que le rang de $\tilde{T}(\pi)$ est presque toujours n. Formellement

H 3' : $n \leq r-1$ et il existe $u \in \mathbb{R}^{r}_{++}$ et $\pi \in \mathbb{R}^{n}$ tels que $u'. T(\pi) = 0$ et $T(\pi)$ a rang n.

Cependant, nous allons considérablement renforcer cette hypothèse en supposant que $\Lambda = \{\Lambda^{+}, \Lambda^{-}\}$ est régulière.

H 3 : Pour tout $\pi \in \Pi \equiv \{\pi \in \mathbb{R}^{n} \mid \exists\, u \in \mathbb{R}^{r}_{++} \text{ tel que } u'\, T(\pi) = 0\}$, $T(\pi)$ a rang n.

Remarquons que à chaque vecteur de prix des biens $p \in \mathbb{R}^{r}_{++}$, il correspond un seul π par l'équation $p'.T(\pi) = 0$

Cependant, à chaque $\pi \in \Pi$, il peut correspondre une infinité de $p \in \mathbb{R}^{r}_{++}$, par cette même relation. Il s'ensuit que vouloir obtenir le comportement habituel de la demande aux limites en fonction de p est une entreprise sans espoir.

<u>Exemple 1</u> : Il y a 4 biens ($r = 4$) et $n = 1$.

$$T(\pi) = [1, 1, -\pi, -\pi]'$$

Pour $p' = [0, 1/2, 0, 1/2]$, nous avons $\pi = 1$:

$$p'T(1) = 0$$

Bien que les prix de certains biens sont nuls, l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{R}^r \mid w_i + z \in \mathbb{R}^r_{++}, \exists\, a \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad T(1)\, a = z\}$$

est borné.

Finalement, l'équilibre des emplois et des ressources est requis sur chaque marché c.a.d. ;

$\forall \beta$: $\sum_i z_i^\beta = 0$ ou bien $\sum_i a_i = 0$

Nous abordons maintenant la formulation de l'idée selon laquelle les différents agents ne participent pas de la même façon à chaque marché Formellement, nous supposons :

H 4 : Pour tout β, $z_i^\beta \in Z_i^\beta$ où Z_i^β est un sous espace vectoriel de Z^β défini par

$$Z_i^\beta = \{z \in \mathbb{R}^r \mid z = \tilde{T}^\beta \tilde{a}^\beta \text{ pour un } \tilde{a}^\beta \in \mathbb{R}^{n(\beta)} \text{ tel que } {}_2\tilde{a}_i^\beta = \bar{C}_i^\beta\, {}_1\tilde{a}_i^\beta$$

$$\text{où } [{}_1\tilde{a}_i^\beta, {}_2\tilde{a}_i^\beta]' = [\tilde{a}^\beta_{i,1}, .., \tilde{a}^\beta_{i,n(\beta)-1}]'\}$$

La matrice $\bar{C}_i^\beta$ a $n_i(\beta)$ colonnes et $(n(\beta)-1-n_i(\beta))$ lignes, le panier numéraire n'entrant pas dans les liaisons linéaires définies par $\bar{C}_i^{\beta}$.

Posons :

$${}_1a'_i = [{}_1\tilde{a}'^1, \ldots, {}_1\tilde{a}'^\beta_i, \ldots, {}_ia'^N]$$

Notons :

$$a^\beta = C_i^\beta\, {}_1a_i^\beta$$

où C_i^β est égale, à une permutation des colonnes près, à $\begin{bmatrix} I \\ \bar{C}_i^\beta \end{bmatrix}$ où I est la matrice unité $n_i(\beta) \times n_i(\beta)$.

et définissons la matrice $n_i \times n$, où $n_i = \sum_\beta n_i(\beta)$:

$$C_i = \begin{bmatrix} C_i^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_i^N \end{bmatrix}$$

Par construction C_i a rang n_i . Nous avons donc

$$a_i = C_{i\ 1}a_i$$

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un équilibre concurrentiel pour une structure de marché à laquelle les différents agents ont un accès asymétrique.

<u>Définition</u> : Un équilibre concurrentiel pour la structure de marchés $\Lambda = \{\Lambda^+ , \Lambda^-\}$ et des accès définis par $\{C_1 ,\dots, C_m\}$ est un triplet $\{\pi^* , a^* , z^*\}$ tel que

(i) $\forall i : T(\pi^*)\ a_i^* - z_i = 0$ et $a_i^* = C_{1\ 1}a_i^*$

(ii) $\sum_i a_i^* = 0$

(iii) $\forall i : z_i^*$ maximise $\tilde{u}_i(w_i + z)$ dans l'ensemble des z tels que

$z = T(\pi)a$ pour un a tel que $a_i = C_{i\ 1}a_i$

Utilisons les matrices $C_1 ,\dots, C_m$ pour écrire les équations qui caractérisent l'équilibre sans une forme aisément manipulable.

Pour tout i et tout π , considérons

$$[\Lambda^+ - \Lambda^-[\pi]]\ C_i = \Lambda^+\ C_i - \Lambda^-[\pi]\ C_i$$

et définissons

$$\Lambda_i^+ \equiv \Lambda^+ C_i \ , \ \pi_i = C_i' \pi \quad \text{et}$$

$$\Lambda_i^- = [\Lambda_i^{-1} \ ,\ldots, \ \Lambda_i^{-\beta} \ ,\ldots, \ \Lambda_i^{-N}]$$

où $\Lambda_i^{-\beta}$ est la matrice $n_i(\beta) \times r$ formée du vecteur colonne $\ell_{n(\beta)}^{\beta}$

répété $n_i(\beta)$ fois.

Il s'ensuit que pour tout π

$$T(\pi) \ C_i \ {}_1a_i = (\Lambda_i^+ - \Lambda_i^- \ \pi_i \ ) \ {}_1a_i \equiv T_i(\pi_i) \ {}_1a_i$$

où $[\pi_i]$ est la matrice diagonale $n_i \times n_i$ formée des éléments du vecteur

$\pi_i = C_i' \ \pi_i$

Avec ces nouvelles notations, un équilibre est un quadruplet

$[\pi^* \ , \bar{\pi}^* \ , {}_1a^* \ , z^*]$ où $\bar{\pi}^* = [\pi_i^* \ ,\ldots, \ \pi_m^*]$ tel que

(i) $\sum_i C_i \ {}_1a_i^* = 0$

(ii) $T_i(\pi_i^*) \ {}_1a_i^* = z_i^* \quad \forall i$

(iii) $u_i'(w_i + z_i^*) \quad T_i(\pi_i^*) = 0 \quad \forall i$

(iv) $\pi_i^* = C_i' \ \pi^* \quad \forall i$

L'exemple le plus simple de la participation asymétrique est le suivant Pour chaque i, il existe un ensemble $N_i \subset N$ tel que $a_i^{\alpha} = 0$ pour $\alpha \notin N_i$ $(n_i = |N_i|)$. Dans ces conditions, s'il existe α' tel que $\alpha_i^{\alpha'} = 0$ pour tout i, on peut tout aussi bien éliminer le marché simple α' de l'analyse. Les deux implications principales sont alors :

(i) Pour tout π, l'espace vectoriel $Z(\pi)$ défini par

$$Z(\pi) \equiv \{z \in \mathbb{R}^r \mid \exists \ a \in \mathbb{R}^n \ \text{t. q.} \quad z = T(\pi) \ a\}$$

est le plus petit sous espace vectoriel qui contienne simultanément tous les $Z_i(\pi)$, où :

$Z_i(\pi) \equiv \{z \in \mathbb{R}^r \mid z = T(\pi)a \text{ pour a t.q. } a^\alpha = 0 , \alpha \notin N_i\}$

(ii) Evidemment, C_i est injective. De plus, soit

$$\bar{\pi}' = [\pi_1' ,\dots, \pi_i' ,\dots, \pi_m'] \quad \text{et}$$

$$C' = \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ C_m' \end{bmatrix}$$

Nous avons donc

$$\bar{\pi} = C'\pi$$

Alors le rang de C' est n .

Dans le cas général, nous désirons conserver cette propriété et nous écrivons

H 5 : le rang de la matrice C' où

$$C' = \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_m' \end{bmatrix}$$

est n . De plus, chaque C_i a rang n_i

<u>Exemple 2</u> : Modèle canonique : (Marchés au comptant et marché des titres). Il y a 2 périodes (période 0 et période 1) et σ états de la nature à la période 1. Il y a r' biens en chaque état-période $s = 0 , 1 ,., \sigma$. Le nombre total de biens au sens de Arrow-Debreu est donc $r \equiv (\sigma+1)r'$. Il y

a $\sigma + 1$ marchés au comptant et le marché des titres. Donc $N = \sigma + 2$. Le dernier bien r' est pris comme numéraire pour chacun des $\sigma + 1$ marchés au comptant. On suppose que chaque titre j(il y en a k) est payé à la période 0 et que son prix, évalué en le numéraire de la période 0, est $\bar{\bar{\pi}}^j$. Soit $\bar{\bar{\pi}} = [\bar{\bar{\pi}}^1 ,\dots, \bar{\bar{\pi}}^j ,\dots, \bar{\bar{\pi}}^k]$. La possession du titre j donne droit à un vecteur b^j en biens de la période 1, $b^j \in \mathbb{R}^{\sigma r'}$. Soit B la matrice $\sigma r' \times k$ des b^j .

La matrice $T(\pi)$ caractérise cette structure de marchés

$$T(\pi) = \begin{bmatrix} T^{\circ}(\pi^{\circ}) & & & -\bar{\bar{\pi}}' \\ & T^1(\pi^1) & & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \\ & & T^{\sigma}(\pi^{\sigma}) & \end{bmatrix}$$

où pour $\beta = s = 0 ,\dots, \sigma$

$$T^s(\pi^s) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ -\pi_1^s & \cdots & -\pi_{r'-1}^s \end{bmatrix}$$

est une matrice $r' \times (r'-1)$ et $\bar{\bar{\pi}}'$ est un k vecteur ligne placé à la rangée du bien r de la période 0 .

Evidemment, $\Lambda^{\beta+} = I_{(r'-1)}$ (la matrice unité) pour $\beta = 0 ,\dots, \sigma$ et $\Lambda^{(\sigma+1)+} = B$. Pour $\beta = 0 ,\dots, \sigma$, $\tilde{t}^{\beta}_{n(\beta)}$ est le vecteur formé de 0 sauf à la ligne $(\beta r')$ dont l'élément est 1 . $\tilde{t}^{\sigma+1}_{n(\sigma+1)h} = 0$ pour $h \neq r'$ et $\tilde{t}^{\sigma+1}_{n(\sigma+1)r'} = 1$

Cette structure de marchés satisfait les hypothèses H 2 et H 3' si $k \leq \sigma$ et si B a rang k . Si de plus, pour chaque $s \geq 1$, il n'y a qu'un seul bien h(s) pour lequel la ligne correspondante de B n'est pas nulle, alors $T(\pi)$ satisfait l'hypothèse H 3 avec $n = \sigma + 1(r'-1) + k \leq r-1$

La présentation classique du problème est évidemment équivalente à celle que nous avons proposé.

Fixons à 1 le prix du numéraire en chacun des états s . Donc p^s - le vecteur des prix des biens sur le marché au comptant de l'état s - est égal à $[\pi_1^s , \ldots , \pi_{r-1}^s , 1]$.

Les contraintes budgétaires s'écrivent donc $(z_i^s \equiv x_i^s - w_i^s)$

$$p^o z_i^o + \sum_j^k \bar{\bar{\pi}}^j \bar{\bar{a}}_i^j = 0 \qquad s = 0$$

$$p^s (z_i^s + \sum_j^k b_s^j \bar{\bar{a}}^j) = 0 \qquad s \geq 1$$

De même les contraintes ressources emplois s'écrivent

$$\sum_i z_i^s = 0 \qquad \forall\, s$$

$$\sum_i \bar{\bar{a}}_i^j = 0 \qquad \forall\, j$$

Etant donné H 1 , il est clair que les deux formulations sont équivalentes.

En général, il est supposé que les agents économiques participent complètement aux marchés au comptant et que la participation est asymétrique seulement sur le marché des titres ($\beta = N$). Dans ce cas, $C_i^\beta = I_{r'-1}$ pour tout i et tout β différent de N .

Du fait que C_i a rang n_i pour tout i , les propriétés de $T(\pi)$ se retrouvent pour tous les $T_i(\pi_i)$.

<u>Lemme</u> : Sous l'hypothèse H 3 , pour tout i, $T_i(\pi_i)$ a rang n_i pour tout π_i tel que $\pi_i = C_i'\pi$ pour $\pi \in \Pi$. De plus $\Lambda_i = \{\Lambda_i^+ , \Lambda_i^-\}$ satisfait l'hypothèse H 2

Démonstration : Immédiat, sachant que pour tout i , C_i a rang n_i .

C.Q.F.D.

II

Un équilibre s'écrit donc

$$T_i(\pi_i)\ {}_1a_i - z_i = 0 \qquad \forall i$$

$$u'_i(w_i + z_i)\ T_i(\pi_i) = 0 \qquad \forall i$$

$$\sum_i C_i\ {}_1a_i = 0$$

$$\pi_i - C_i'\pi = 0 \qquad \forall i$$

1. Examinons d'abord les equations qui caractérisent le comportement du consommateur : Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice i et écrivons a au lieu de ${}_1a$:

$$T(\pi)\ a - z = 0$$

$$u'(w + z)\ T(\pi) = 0$$

Dérivons totalement, en maintenant w constant

$$-\Lambda^-[a]d\,\pi + T(\pi)\ d\,a - I\ d\,z = 0$$

$$-[(\Lambda^-)'u]\ d\,\pi + T'U\ d\,z = 0$$

$[a]$ est la matrice diagonale formée des éléments du vecteur a et $[(\Lambda^-)'u]$ est égale à

$$\begin{bmatrix} \sum_h \lambda_h^{-1} u_h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_h \lambda_h^{-n} u_h \end{bmatrix}$$

D'après H 1 et H 2, $[(\Lambda^{-})'u]$ a rang n .

Substituons, pour obtenir :

$$T'U\,(T\,d\,a - \Lambda^{-}[a]\,d\,\pi) = [(\Lambda^{-})'u]\,d\,\pi \qquad \text{ou encore}$$

$$T'U\,T\,d\,a = [(\Lambda^{-})'u]\,d\,\pi + T'U\,\Lambda^{-}[a]\,d\,\pi = B\,d\,\pi$$

Nous obtenons alors très simplement la généralisation des equations de Slutzky

$$d\,a = (T'U\,T)^{-1}\,[(\Lambda^{-})'u]\,d\,\pi + (T'U\,T)^{-1}\,T'U\,\Lambda^{-}[a]\,d\,\pi$$

Evidemment, $(T'U\,T)^{-1}\,[(\Lambda^{-})'u]$ est la généralisation de la matrice de Slutzky et elle formule les effets de substitution car si $a = 0$

$$\begin{aligned} d\,a &= (T'(\pi)\,U\,T(\pi)^{-1}\,[(\Lambda^{-})'u]\,d\,\pi \\ &= K\,d\,\pi \end{aligned}$$

<u>Proposition 1</u> (Slutzky) : La matrice de Slutzky K est définie négative c.a.d.

$$a'K\,a < 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^{ni}$$

Démonstration : $T'(\pi)\,U\,T(\pi)$ est définie négative car (H 1) $z'U\,z < 0$ pour tout z tel que $u'z = 0$. Or $z = T(\pi)a$ implique $u'z = 0$ car $u'T(\pi) = 0$. Comme $[(\Lambda^{-'})u]$ est une matrice diagonale avec des éléments strictement positifs sur la diagonale principale, nous obtenons le résultat désiré.C.Q.F.D.

Remarque : Examinons l'effet d'une variation de w seulement. Nous obtenons

$$d\,a = T'U\,d\,w$$

Le même argument que celui de la démonstration de la Proposition 1 montre que $T'U$ à rang n.

Finalement, les hypothèses H 1 et H 2 nous permettent d'écrire la contrepartie du comportement de la demande à la frontière de l'ensemble des prix strictement positifs.

Proposition 2 : (Comportement de la demande près de la frontière) :

Supposons que z_i appartienne à un compact de $\mathbb{R}^r_{++}$. Alors π_i appartient à un compact de $\mathbb{R}^{n_i}$ sous les hypothèses H 1 et H 2.

Démonstration : Nous avons

$$\pi_i^\alpha = \sum_h \lambda_h^{*+} u_h \left(\sum_h \lambda_h^{\alpha-} u_h\right)^{-1} \quad \forall\, \alpha \in N_i$$

La conclusion s'ensuit car $\lambda^{\alpha-} \in \mathbb{R}^r_+ \setminus \{0\}\ \forall\, \alpha \in N_i$

C.Q.F.D.

Remarque : L'hypothèse H 5 garantit que si, pour tout i, π_i appartient à un compact, il en est de même de π.

2. Montrons maintenant que l'ensemble des équilibres, quand $w = [w_1,\dots,w_m]$ varie dans $\Omega \equiv \mathbb{R}^{m.r}_{++}$, est une variété de dimension $m.r$.

Considérons le système suivant

$$[T_i(\pi_i)]'\, u_i(w_i + T_i(\pi_i)\ {}_1a_i) = 0 \qquad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_i C_i\ {}_1a_i = 0$$

$$\pi_i - C'_i\,\pi = 0 \qquad i = 1,\dots,m$$

Nous avons $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i$ équations pour $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i + m\,r$ variables. Montrons que la matrice des dérivées partielles par rapport à $(\pi_1,\dots,\pi_m\ ;\ \pi\ ;\ a_1,\dots,a_m\ ;\ w_1,\dots,w_m)$ a rang $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i$

$$\begin{bmatrix}
\begin{matrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} T_1' U_1 T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_m' U_m\ T_m \end{matrix} & \begin{matrix} T_1'\ U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_m'\ U_m \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & & 0 \end{matrix} & 0 & C_1 \dots\dots C_m & 0 \dots\dots 0 \\
\begin{matrix} I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{n_m} \end{matrix} & \begin{matrix} C_1' \\ \vdots \\ C_m' \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots\dots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0 \dots\dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots\dots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0 \dots\dots 0 \end{matrix}
\end{bmatrix}$$

Nous remarquons que du fait que $T_i'\ U_i$ à rang n_i, pour qu'une combinaison des lignes soit nulle, il faut que les poids affectés au $\sum_i n_i$ premières lignes soient nuls. Mais alors, il est clair, du fait que $[C_1,\dots,C_m]$ à rang n que toute combinaison linéaire des lignes qui est nulle, implique que les poids sont nuls. On peut donc conclure que l'ensemble Γ des $[(\pi_i)_i, \pi, {}_1a\ ;\ w]$ tels que $[(\pi_i)_i, \pi, {}_1a]$ est un équilibre pour w et une variété différentielle de dimension $m\ r$.

3. Considérons la projection $P_r : \Gamma \to \Omega$ qui associe w à tout $[(\pi_i)_i, \pi, a, w] \in \Gamma$. Montrons que P_r est propre c a d que pour tout compact $D \subset \Omega$, $P_r^{-1}(D)$ est compact. Remarquons d'abord que pour tout $w \in D$, à un équilibre, chaque agent à une allocation x_i qui reste dans l'ensemble des allocations borné inférieurement par l'hypersurface d'indifférence passant par w_i. Tenant compte de la relation $\sum_i z_i = 0$, il s'ensuit que

pour tous les équilibres associés à D, u_i varie pour chaque i dans un compact. L'hypothèse H 1 garantit alors que pour tout i, π_i varie dans un compact. D'après H 5, il en est de même de π. D'après H 3, a_i reste aussi dans un compact pour tout i. Donc P_r est bien propre.

4. Pour appliquer la théorie du degré modulo 2 et montrer qu'il existe au moins un équilibre pour chaque $w \in \Omega$, nous devons prouver qu'il existe $\bar{w} \in \Omega$ tel que $P_r^{-1}(\bar{w})$ contient un seul élément, c a d qu'il existe un seul équilibre pour $\bar{w}$. Considérons un optimum de Pareto $\bar{x}$ pour une économie avec ressources initiales $\sum_i w_i$, $w \in \Omega$. Posons $\bar{w} = \bar{x}$. L'équilibre sans échanges ($a_i = 0 \ \forall i$) avec π défini par la relation $[T(\pi)]'u_i = 0$ (tous les u_i sont colinéaires pour un optimum de Pareto) est l'unique équilibre associé à $\bar{w}$.

5. La dernière étape consiste à montrer que la matrice des dérivées partielles (du système d'équations qui définit Γ) par rapport à $[(\pi_i)_i, \pi, ({}_1a_i)_i]$ a rang $2\sum_i n_i + n$. Cette matrice s'écrit (sachant qu'elle est évaluée au point ${}_1a = 0$) :

$$\begin{bmatrix} -[(\Lambda_1^-)'u_1] & & 0 & 0 & T_1'U_1T_1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -[(\Lambda_m^-)'u_m] & 0 & 0 & & T_m'U_mT_m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_1 & \cdots & C_m \\ I_{n_1} & & 0 & C_1' & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & I_{n_m} & C_m' & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Les hypothèses H 1 , H 2 , H 3 et H 5 combinées à la Proposition 1 garantissent que cette matrice a bien rang n .

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe ci-dessus $[(d\pi_i)_i \ , d\pi \ , (d_1 a_i)_i]' \neq 0$ tel que le produit de la matrice ci-dessus par ce vecteur soit égal à 0 - On a alors pour tout i

$$d\ _1a_i = K_i \ d\ \pi_i$$

$$\text{et} \quad d\ \pi_i = C_i' \ d\ \pi$$

d'où

$$d\ _1a_i = K_i \ C_i' \ d\ \pi$$

De plus $\sum_i C_i \ d\ _1a_i = 0$, d'où $\sum_i C_i \ K_i \ C_i' \ d\ \pi = 0$

Multiplions à gauche par $d\ \pi'$, pour obtenir

$$\sum_i (d\ \pi' \ C_i) \ K_i (C_i' \ d\ \pi) = 0$$

Comme K_i est définie négative pour tout i, ceci implique $C_i' \ d\ \pi = 0 \ \forall i$.
Mais $d\ \pi_i = 0$, $\forall i$ implique $d\ \pi = 0$ et aussi $d_1a_i = 0$ pour tout i : une contradiction.

On peut donc énoncer :

Proposition 3 : Pour tout $w \in \Omega$, il existe un équilibre et Γ est une variété.

Evidemment, nous avons aussi, que pour presque tout $w \in \Omega$, il existe un nombre fini d'équilibres.

Proposition 4 : Il existe un ensemble $\Omega_\circ$, ouvert dense dans Ω, tel que pour tout $w \in \Omega_\circ$, $P_r^{-1}(w)$ contient un nombre fini de points.

Démonstration : Notons que P_r est propre. D'après le théorème de Sard, l'ensemble $\Omega_\circ$, des valeurs régulières de $P_r : \Gamma \to \Omega$ est un ouvert dense de Ω.

La conclusion s'ensuit. C.Q.F.D.

Notes de bas de page

* Je remercie D. Cass pour des discussions éclairantes. Je remercie aussi C. Le Van pour ses critiques éclairantes.

1. Pour une analyse où l'incomplétude des marchés et la participation asymétrique naissent d'hypothèses d'asymétrie d'information, voir Y. Younès (1984).

2. La démarche suivie dans cette deuxième partie est fort classique. Voir à ce sujet Y. Balasko (1986).

3. Comme nous supposons les "prix" totalement flexibles, chaque espace vectoriel a une dimension égale au moins à deux (Voir Y. Younès (1985)).

4. Cette formulation trouve évidemment son origine dans la théorie des équilibres avec rationnement. Sur les biens très étroits entre les deux champs de recherche, voir Y. Younès (1985). Dans E. Malinvaud et Y. Younès (1978), l'importance du problème de l'accès asymétrique aux marchés est signalé.

- B I B L I O G R A P H I E -

Y. Balasko (1986) : Fondements de la théorie de l'équilibre général. Manuscrit.

Y. Balasko et D. Cass (1985), "Regular Demand with Several, General Budgetary Contraints", Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Y. Balasko et D. Cass (1986), "The Structure of Financial Equilibrium I." Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Y. Balasko, D. Cass et P. Siconolfi (1987) "The Structure of Financial Equilibrium II." Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

D. Cass (1986), "Competitive Equilibrium with Incomplete Financial Markets", Caress Working, University of Pennsylvania.

S. Chae (1985), "Existence of Competitive Equilibrium with Incomplete Markets", Working Paper, Rice University.

D. Duffie et W. Shafer (1985), 'Equilibrium in Incomplete Markets I.", Working Paper, University of California at Berkeley.

J. Geanakoplos et A. MasColell (1985), "Real Indeterminacy with Financial Assets", Cowles Foundation Discussion Paper.

O. Hart (1975) "On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is incomplete, "Journal of Economic Theory, 11 p. 418-443.

M. Magill et W. Shafer (1985), "Equilibrium and Efficiency on a Canonical Asset Trading Model", Working Paper, University of Southern Xalifornia.

D. McManus (1984), "Generic Existence of Equilibrium and Optimality Properties in an Economy with Future Markets", Working Paper, University of Pennsylvania.

E. Malinvaud et Y. Younès (1978), "Une nouvelle formulation des fondements microeéconomiques de la macroéconomie" Cahiers du Séminaire d'Econométrie.

H. Polemarchakis (1986), "Equilibrium with Incomplete Markets : A simple Proof and Further Results", Working Paper.

R. Radner (1972), "Existence of Equilibrium Plans, Price and Price Expectation in a Sequence of Markets", Econometrica, 40 p. 289-303.

R. Repullo (1983), "Equilibrium and Efficiency in Economies with a Sequence of Markets", Chapter 6, Ph. D. Dissertation, London School of Economics.

J. Werner (1985), "Equilibrium on Economies with Incomplete Financial Markets", Journal of Economic Theory 36 p. 110-119.

Y. Younès (1984), "General Competitive Equilibrium with Asymmetric Information and Signalling", Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Y. Younès (1985), 'on the Theory of Incomplete Markets" Caress Working Paper. University of Pennsylvania.