

**HIERARCHIE TEMPORELLE DANS UN MODELE MACROECONOMIQUE.
APPLICATION A UNE MAQUETTE DU MODELE METRIC**

Cuong LE VAN et Pierre MALGRANGE
(CNRS - CEPREMAP)

N°8625

Nous tenons à remercier Christian Gourieroux qui nous a fait bénéficier d'un grand nombre de critiques et suggestions fructueuses.

HIERARCHIE TEMPORELLE DANS UN MODELE MACROECONOMIQUE
APPLICATION A UNE MAQUETTE DU MODELE METRIC

RESUME

Le papier consiste en une investigation méthodologique sur les hiérarchies dynamiques implicites dans un modèle macroéconomique à partir d'un concept de délai alternatif à celui de délai moyen, et qui a pour but de décrire les tendances lourdes du système, laissant de côté les fluctuations de courte période.

RELATIVE LAGS IN A MACROECONOMETRIC MODEL

SUMMARY

The paper consists of an investigation on the dynamical hierarchies implicit in a macroeconometric model. A concept of lag different from the concept of mean lag is used which aims at describing strong trends in the system, leaving aside short run fluctuations. A numerical illustration is then given on a reduced version of the French quarterly model METRIC

Mots clés : Modèle macroéconomique - délai - hiérarchie - stabilité

Key words : Macroeconometric model - lag - hierarchy - stability

JEL Classification : 210

INTRODUCTION

Les propriétés dynamiques des modèles macroéconométriques résultent de l'interaction complexe d'un grand nombre de délais de base (délais d'anticipations, d'ajustement et d'accumulation, voir Nerlove (1972)).

La spécification des différentes équations du modèle et les hasards de leur estimation impliquent des viscosités inégales des différentes variables avec des conséquences macroéconomiques sur l'évolution dynamique extrêmement importantes. Citons par exemple le célèbre cycle de productivité lié à la grande viscosité de l'emploi ainsi que la non moins célèbre courbe en J liée aux effets prix du commerce extérieur. (effets défavorables d'une dévaluation à court terme).

La présente contribution consiste en une investigation d'ordre méthodologique sur les hiérarchies dynamiques implicites dans un modèle macroéconomique en décrivant un concept de délai alternatif au concept traditionnel de délai moyen. La technique proposée a pour but d'analyser les tendances "lourdes" du système, laissant de côté les fluctuations de courte période. Elle s'applique à un modèle linéaire stationnaire. Deux notions de base sont présentées : celle de délai de réaction d'une variable endogène à un choc exogène, et celle de hiérarchie temporelle des variables endogènes, selon leur vitesse de convergence.

Dans une première partie les concepts sont introduits après avoir donné les éléments pour mettre un modèle macroéconomique sous une "forme canonique", adéquate au propos. Une application rapide à une version réduite du modèle METRIC en est faite dans une deuxième partie.

I - METHODOLOGIE GENERALE

1.1 - Généralités

Le principe, avons-nous dit est de mettre le modèle sous une forme "canonique" c'est-à-dire stationnaire et linéarisée, de manière à pouvoir bénéficier de la puissance de l'analyse linéaire.

Présentons brièvement le principe de la démarche.

Un modèle dynamique en temps discret peut s'écrire :

$$(1) \quad \psi(Y_t, Y_{t-1}, \dots, X_t, \beta, t) = 0,$$

avec Y (resp. X) vecteur des variables endogènes (resp. exogènes).

On commence par rechercher une trajectoire de référence particulière consistant en une solution de croissance à taux constant -SCTC- variables exogènes comprises, souvent appelée sentier stationnaire, ou croissance équilibrée, soit :

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{Y}_{it} = \bar{Y}_{i0} m_i^t \\ \bar{X}_{jt} = \bar{X}_{j0} n_j^t \end{cases}$$

On fera l'hypothèse, peu restrictive en pratique, que $\bar{Y}_{i0}$ est non nul pour tout i .

Puis le modèle est soumis à la normalisation suivante, dite "passage en variables réduites" :

$$(3) \quad \begin{cases} y_{it} = (Y_{it} - \bar{Y}_{it}) / \bar{Y}_{it} \\ x_{jt} = (X_{jt} - \bar{X}_{jt}) / \bar{X}_{jt} \end{cases}$$

destinée à substituer à la SCTC une solution fixe, caractérisée par :

$$\bar{x}_{it} = \bar{y}_{jt} \equiv 0$$

Or il se trouve que la structure des modèles macroéconomiques admettant des SCTC est telle que dans leur expression en variables réduites, en général le temps ne figure plus explicitement. Autrement dit, la forme originale (1) se transforma en :

$$(4) \quad \Psi(y_t, y_{t-1}, \dots, x_t, \beta) = 0$$

$$\text{avec } \Psi(0, 0, \dots, 0, \beta) = 0$$

La seule difficulté technique réside dans la possibilité de non existence de solutions de type (2) pour les modèles macroéconomiques standards, ces derniers n'étant pas conçus dans cette optique. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet assez classique, remarquant seulement qu'en général des corrections mineures de spécification aisément interprétables, suffisent à rendre un modèle compatible avec une SCTC (voir par exemple Malgrange (1985)).

Enfin la linéarisation de (4) au voisinage de la solution stationnaire retenue (0,0) conduit à¹ :

$$(5) \quad A_0 y_t + A_1 y_{t-1} + \dots = B x_t$$

On remarque au passage que les matrices A_1 et B s'interprètent en termes de matrices d'élasticités (voir formule (3)).

Par utilisation de l'opérateur décalage L ($L x_t = x_{t-1}$), (5) peut également s'écrire sous la forme condensée d'un modèle autorégressif multidimensionnel :

$$(6) \quad P(L) y = Bx$$

1.2 - Délais de réaction

L'analyse des délais peut alors être entreprise à condition de définir précisément ce terme ce à quoi est consacré le présent paragraphe.

(1) Notons que les restrictions de compatibilité avec une SCTC impliquent, sur le système (5) normalisé, $A_0 + A_1 + \dots = B$, autrement dit qu'il vérifie la propriété d'être homogène de degré 1.

Nous nous situerons dans le cas où (6) décrit une évolution dynamique stable.

On montre aisément que sur un modèle normé du type (6), toute variable endogène y_j , peut s'écrire en réponse à un choc sur la variable exogène x_i ² :

$$P(L) y_j = Q(L) x_i \quad (\text{forme en équations finales})$$

Si les valeurs propres du modèle sont toutes de module inférieur à 1, alors :

$$(7) \quad y_j = \varphi(L) x_i, \text{ avec } \varphi(L) = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi_t L^t$$

et où $\varphi(.)$ est une fonction rationnelle ($\varphi(.) = Q(.)/P(.)$).

On définit alors le délai de réaction à ϵ par la date T_ϵ telle que:

$$|\varphi_t| < \epsilon \quad \forall t > T_\epsilon$$

Propriété :

(i) La date T_ϵ est toujours définie.

(ii) La date T_ϵ est —par définition— indépendante de l'ampleur du choc mais elle dépend évidemment de la variable exogène choquée. Notons que ce concept de délai n'est pas neutre vis-à-vis de la solution stationnaire de départ, même si le modèle original est linéaire.

(2) Pour alléger les notations, on omet les indices i, j dans l'écriture des fonctions φ_{ij} , P_{ij} et Q_{ij} .

1.3 - Principe de calcul des délais

Si le modèle comporte m variables exogènes x_i et n variables endogènes y_j , on peut calculer $m \times n$ délais de réaction. Le présent paragraphe donne ainsi brièvement le principe du calcul de ces délais.

Pour simplifier la présentation nous poserons $Bx = u$.

Considérons un choc ponctuel sur la variable u_1 , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_1(t) = \bar{u}_1 \\ u_1(t) = 0, t > 1 \end{cases}$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres du système, autrement dit les inverses des racines en L de $\text{Det } P(L) = 0$, supposées toutes de module inférieur à 1 (hypothèse de stabilité). Supposons de plus que la valeur propre dominante du système λ_m est réelle et simple.

Si λ_m est "suffisamment séparée", le terme en λ_m finira par dominer les autres termes et l'expression (7) conduira à :

$$(8) \quad \boxed{y_j(t) = \bar{u}_1 \theta_{j1} \lambda_m^t}$$

Il reste à calculer le délai T_ϵ de y_j par rapport à u_1 par la formule :

$$(9) \quad T_\epsilon = \text{Min} \left\{ t: \left| \theta_{j1} \lambda_m^t \right| < \epsilon \right\}$$

Remarques

1. Les θ_{ji} peuvent se déterminer par simulation :

$$(10) \quad \theta_{j1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_j(t)}{\lambda_m^t \bar{u}_1}$$

qui en pratique converge dès que la contribution de la plus grande valeur propre λ_m domine.

2. Dans le cas où la valeur propre de plus grand module λ_m est complexe, au bout d'un terme suffisamment long le couple $\bar{\lambda}_m, \lambda_m$ domine les autres valeurs propres du système soit :

$$y_j(t) = \bar{u}_1 (\theta_{j1} \lambda_m^t + \bar{\theta}_{j1} \bar{\lambda}_m^t)$$

On peut dans ce cas également déterminer θ_{j1} par simulation, en utilisant la formule :

$$\theta_{j1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_j(t) - \bar{\lambda}_m y_j(t-1)}{\lambda_m^{t-1} (\lambda_m - \bar{\lambda}_m)}$$

Et la date T_ϵ est définie dans ce cas par :

$$(11) \quad T_\epsilon = \text{Min} \left\{ t : \left| R_e(\theta_{j1} \lambda_m^t) \right| < \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

3. La présente approche est formellement équivalente à la projection du système sur la direction propre correspondant à la plus grande valeur propre parallèlement au sous espace propre complémentaire. On peut montrer que, plus précisément, dans le cas où P est diagonalisable, on a :

$$Q_{i,i,m} = B_{im} B_{im}^{-1}$$

avec B matrice des vecteurs propres,

i_0 indice de l'équation choquée

et i indice de la variable générique étudiée.

La méthode employée a l'avantage d'éviter le calcul des vecteurs propres et vaut même si P n'est pas diagonalisable.

1.4 - Hierarchisation temporelle des variables endogènes

1.4.1 - Considérons l'équation structurelle suivante fréquemment rencontrée dans les modèles macroéconomiques (équation type accélérateur flexible) :

$$I_t = \lambda I_{t-1} + (1-\lambda) v (Q_t - \delta Q_{t-1})$$

$0 < \lambda < 1$ représente le retard dans l'ajustement de l'investissement, v le coefficient de capital et δ le taux de dépréciation des capacités.

La mise sous forme canonique de cette relation —écarts relatifs à la solution stationnaire— conduit à :

$$i_t = \lambda i_{t-1} + \frac{1-\lambda}{1-\delta} (q_t - \delta q_{t-1})$$

Supposons que cette équation fasse partie d'un modèle dynamique multidimensionnel dont i et q constituent deux variables endogènes et dont la valeur propre dominante soit μ réelle.

Si $A \mu^n$ (resp. $B \mu^n$) est le terme générique dominant de i (resp. q), la relation implique par identification des termes en L^n , qu'asymptotiquement :

$$A(\mu-\lambda) \equiv B \frac{1-\lambda}{1-\delta} (\mu-\delta)$$

Par ailleurs le rapport des termes génériques de i et q , $\frac{A}{B}$, est égal à $\frac{1-\lambda}{1-\delta} \cdot \frac{\mu-\delta}{\mu-\lambda}$ et i converge plus vite que q si ce rapport est de module inférieur à 1.

Si donc on retrouve le résultat que l'investissement "précède" la production dans le cas intuitif où $\lambda < \delta < \mu < 1$ ce résultat n'est pas général et peut s'inverser.

1.4.2 - La propriété se généralise aisément :

Considérons une relation du type :

$$A(L) y_1 = B(L) y_2,$$

où A et B sont des polynômes vérifiant $A(1) = B(1)$, et y_1 et y_2 sont deux variables endogènes d'un modèle ayant μ comme valeur propre dominante. Il est facile de voir que, pour t assez grand, si les coefficients de μ^t dans le développement de y_1 et y_2 sont φ_1 et φ_2 , alors ceux de $A(L) y_1$ et $B(L) y_2$ sont $A(\frac{1}{\mu}) \varphi_1$ et $B(\frac{1}{\mu}) \varphi_2$.

Alors, pour T assez grand on a :

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{B(\frac{1}{\mu})}{A(\frac{1}{\mu})}$$

On en déduit que si le rapport $\left| \frac{A(1/\mu)}{B(1/\mu)} \right|$ est inférieur à l'unité, y_1 "converge plus vite" y_2 .

Remarques

1 - Il est important de noter que la hiérarchie entre y_1 et y_2 ne dépend ni de l'origine, ni de l'ampleur du choc.

2 - Dans le cas où le modèle possède un couple de valeurs propres dominantes complexes conjuguées $\mu, \bar{\mu}$ on peut écrire :

$$|\varphi_{it}| \leq 2 |\theta_1| |\mu|^t,$$

avec $|\theta_1|/|\theta_2| = \left| \frac{B(1/\mu)}{A(1/\mu)} \right|$

Le rapport $\left| \frac{B(1/\mu)}{A(1/\mu)} \right|$ permet ainsi de classer deux par deux les variables d'un modèle linéaire stationnaire quelconque.

II - APPLICATION A MICRO-METRIC

La précédente méthodologie est appliquée au bloc multiplicateur-accélérateur d'une version réduite du modèle trimestriel français METRIC (voir Artus-Deleau-Malgrange (1985) ou Kuh - Le Van- Malgrange (1984)).

2.1 - Mise sous forme canonique

La mise sous forme canonique décrite plus haut a conduit au système suivant en écart à la référence stationnaire (1, 1..., 1) ; soit :

$$\begin{aligned}
 LL &= 0.9469 LL(-1) + 0.0487 LD \\
 LD &= 0.976 LD(-1) + 0.024 ID \\
 I &= 0.8804 I(-1) + 0.1196 ID \\
 ID &= 31.5457 (Q - 0.9683 Q(-1)) \\
 CO &= 0.8319 CO(-1) + 0.159 R \\
 QD &= 0.9683 QD(-1) + 0.0317 I \\
 S &= 0.5908 S(-1) + 15.5785 (D - 0.99 D(-1)) \\
 &\quad + 12.7854 (D(-1) - 0.99 D(-2)) \\
 &\quad + 37.1991 (D(-2)) - 0.99 D(-3) \\
 D &= 0.5466 CO + 0.0983 I + 0.2170 X + 0.1381 DA \\
 X &= -1.0951 (Q - QD) \\
 M &= 0.9911 D + 0.0088 S + 1.2308 (Q - QD) \\
 R &= 0.8825 LL + 0.1175 Q \\
 Q &= 1.2657 D + 0.0113 S - 0.2660 M
 \end{aligned}$$

TABLEAU 1 : MICRO-METRIC LINEARISE

Avec les variables endogènes :

LL, emploi

LD, emploi désiré

I, investissement

ID, investissement désiré

CO, consommation des ménages

QD, capacités de production

S, variations de stocks

D, demande finale hors stocks

X, exportations

M, importations

R, revenu des ménages

Q, production

et la variable exogène :

DA, demande des administrations.

On note que ce système est entièrement bouclé, que la connaissance de Q suffit à déterminer le reste.

Par ailleurs 7 variables figurent décalées une fois et une (D) trois fois, suggérant que l'ordre dynamique au système est de 10. En fait la présence de relations comptables conduit à un ordre de 8, ce qui est confirmé par le calcul des valeurs propres donné au Tableau 2 suivant :

TABLEAU 2 : VALEURS PROPRES DE MICRO-METRIC

N°	Module	Période	Délai
1	.9860	∞	212
2	.9683	∞	93
3	.9604	∞	74
4	.8986	∞	28
5	.8299	∞	16
6, 7	.4344	43	3,6
8	-.2611	(2)	2,23

Aucune valeur propre n'a un module dépassant l'unité.

Toutes sont réelles et positives à l'exception du couple 6, 7 complexe et de la valeur propre 8 négative. Dans la dernière colonne on a inscrit le temps que mettent ces différentes valeurs propres à s'éteindre, plus précisément la date T telle que $\lambda_i^T = 0,05$.

Le modèle entièrement bouclé sur Q peut s'écrire formellement :

$$\Psi(L) Q = \theta(L) DA,$$

avec $\Psi(L)$ polynôme d'ordre théoriquement 8, contenant les 8 valeurs propres du modèle.

En fait l'ordre dynamique pertinent si l'on ne choque pas les équations d'investissement I et ID ainsi que de production disponible QD , est de 7. En effet par combinaison des trois relations et réarrangement on trouve aisément que l'expression

$$H = (1 - \lambda_I/\lambda_Q) QD - \lambda_I/\lambda_Q (1 - \lambda_Q) I - \alpha Q$$

avec $\lambda_I = .8804$ $\lambda_Q = .9683$ $\alpha = 3.773$,

vérifie $H = \lambda_Q H_{-1}$

Des manipulations algébriques fastidieuses qu'il est inutile de reproduire ici permettent d'exprimer chaque variable endogène de la maquette comme fraction rationnelle de retards de la variable D.

On peut alors par application de la méthodologie présentée au paragraphe 1.4 hiérarchiser les variables.

Compte tenu des valeurs numériques du modèle, le résultat qualitatif est le suivant :

$$X < ID < I < S < M < D < Q < QD < LD < R < CO < LL$$

On peut calculer numériquement les différents retards, en cherchant le délai θ entre les variables prises deux à deux impliquant un seuil de convergence identique, c'est-à-dire tel que $\left| \frac{A(1/\mu)}{B(1/\mu)} \mu^\theta \right|$ soit égal à 1, avec la relation entre les deux variables supposée écrite : $A(L) y_1 = B(L) y_2$.

On remarque que ce retard ne dépend pas du seuil de convergence ϵ , pourvu que celui-ci soit suffisamment petit (validité de l'approximation de la dynamique par la seule plus grande valeur propre).

On trouve finalement que si en réponse à un choc ponctuel sur les dépenses publiques, à l'instant T la production Q "converge" à ϵ vers sa valeur stationnaire, alors³ :

X	aura convergé à ϵ à	T-146
ID	aura convergé à ϵ à	T- 40
I	aura convergé à ϵ à	T- 32
S	aura convergé à ϵ à	T- 25
M	aura convergé à ϵ à	T- 15
D	aura convergé à ϵ à	T- 2
QD	aura convergé à ϵ à	T+ 8
LD	aura convergé à ϵ à	T+ 21
R	aura convergé à ϵ à	T+ 32
CO	aura convergé à ϵ à	T+ 33
LL	aura convergé à ϵ à	T+ 35

(3) L'unité de temps est le trimestre.

BIBLIOGRAPHIE

Artus P., M. Deleau, P. Malgrange (1985) - Modélisation Macroéconomique, Economica, Paris.

Kuh E., C. Le Van, P. Malgrange (1985) - "Une étude de la dynamique structurelle des modèles macroéconomiques" Rapport CEPREMAP.

Malgrange P. - "Sentiers stationnaires des macroéconomiques : leçons de la maquette du CEPREMAP", In Ristchard G. et Royer D. eds , Optimalités et Structures, Economica, Paris.

Nerlove M., (1972) - "Lags in Economic Behavior", Econometrica, Vol. 40, n°2.