DECEMBRE 1983

N° 8327

MODELES A ANTICIPATIONS RATIONNELLES
APPRENTISSAGE PAR REGRESSION

FOURGEAUD, C.*, GOURIEROUX, C.**, PRADEL, J.***

* Université PARIS I et CEPREMAP
** Université PARIS IX et CEPREMAP
*** Université PARIS I

1. INTRODUCTION

Une justification possible de l'introduction dans les modèles macroéconomiques de l'hypothèse d'anticipation rationnelle consiste à présenter celle-ci comme limite d'un processus d'apprentissage. La méthode retenue pour prévoir durant cette phase d'ajustement peut être de type adaptatif (Gourieroux - Laffont - Monfort (1983)) ou être déduite de l'utilisation d'un modèle de prévision auxiliaire (Bray (1981), Bray (1982), Champsaur (1982)). Dans ce papier, nous nous intéresserons essentiellement à la seconde approche.

Afin d'illustrer de façon simple les propriétés d'une telle procédure, nous considèrerons le modèle de Muth d'équilibre sur un marché agricole (paragraphe 2). Nous expliquons dans le paragraphe 3 comment calculer les prévisions à partir d'un modèle auxiliaire comportant une variable explicative et examinons la façon dont sont révisées les prévisions à chaque observation nouvelle. Dans le paragraphe 4 nous déterminons les cas où le processus d'apprentissage converge et montrons que la limite est solution d'un modèle à anticipations rationnelles dans lequel l'information disponible est composée de la variable explicative utilisée dans la régression auxiliaire.

2. LE MODELE

Nous considérons le modèle proposé par Nerlove (1958) et Muth (1961) pour décrire l'évolution des prix sur un marché agricole. La demande de bien est fonction du prix y et de diverses variables explicatives aléatoires z_1 :

$$d_t = \alpha_1 y_t + z_{t1} \beta_1 \qquad \alpha_1 < 0$$

L'offre de bien ne dépend pas du prix actuel, mais d'une anticipation de ce prix faite à la date précédente. Introduire cette anticipation $\tilde{y}_t$ a pour but de prendre en compte le décalage existant entre décision de production et mise sur le marché. L'équation d'offre est de la forme :

$$s_t = \alpha_2 \tilde{y}_t + z_{t2} \beta_2 \qquad \alpha_2 > 0$$

en désignant par z_2 les variables explicatives intervenant dans la fonction d'offre. Sous l'hypothèse d'équilibre $d_t = s_t$, nous pouvons en déduire une équation réduite donnant l'évolution des prix :

$$\alpha_1 y_t + z_{t1} \beta_1 = \alpha_2 \tilde{y}_t + z_{t2} \beta_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_t = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tilde{y}_t + \frac{z_{t2} \beta_2 - z_{t1} \beta_1}{\alpha_1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1) \quad \boxed{y_t = a \tilde{y}_t + u_t}$$

avec $a = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $u_t = \dfrac{z_{t2} \beta_2 - z_{t1} \beta_1}{\alpha_1}$.

L'équation (1) décrit la façon dont le prix y_t dépend des anticipations $\tilde{y}_t$ et des valeurs des composantes explicatives, regroupées dans le terme u_t .

Il reste pour compléter le modèle à expliquer comment est déterminée la prévision $\tilde{y}_t$. Sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles, $\tilde{y}_t$ est supposée égale à une prévision optimale de y_t faite à la date t-1 en utilisant une certaine information $\mathcal{I}_{t-1}$. De manière plus précise, si l'information disponible est composée de l'observation de variables aléatoires $x_t = (x_{t1},\dots,x_{tk})$, cette prévision optimale, notée $E(y_t/\mathcal{I}_{t-1})$ est prise égale à la régression linéaire théorique de y_t sur $x_{t1},\dots,x_{tk}$. Sous cette hypothèse supplémentaire, le modèle s'écrit :

$$(2) \qquad y_t = a\,E(y_t/\mathcal{I}_{t-1}) + u_t$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{I}_{t-1} = (x_{t1},\dots,x_{tk}) \ .$$

Des choix différents de l'ensemble d'information $\mathcal{I}_{t-1}$ conduisent généralement à des modèles différents. L'ensemble $\mathcal{I}_{t-1}$ constitue donc une part importante de la spécification du modèle à anticipations rationnelles (2).

Les modèles du type précédent admettent une solution unique. Celle-ci s'obtient en prenant la prévision optimale des deux membres de l'égalité (2) :

$$E(y_t / \mathcal{I}_{t-1}) = a\, E(y_t / \mathcal{I}_{t-1}) + E(u_t / \mathcal{I}_{t-1})$$

$$\Longleftrightarrow \quad E(y_t / \mathcal{I}_{t-1}) = \frac{1}{1-a} E(u_t / \mathcal{I}_{t-1})$$

La solution est donc :

$$(3) \qquad \boxed{y_t = \frac{a}{1-a} E(u_t / \mathcal{I}_{t-1}) + u_t}$$

Il faut évidemment supposer $a \neq 1$, ce que nous ferons dans la suite.

3. LA PROCEDURE D'APPRENTISSAGE.

Dans ce paragraphe, nous supposons que les prix réagissent aux anticipations $\tilde{y}_t$ et aux exogènes u_t par l'intermédiaire de : (1) $y_t = a\,\tilde{y}_t + u_t$. Les prévisions ne sont cependant pas calculées de la manière optimale décrite précédemment.

a. Mode de calcul de l'anticipation.

Durant la phase d'apprentissage, les prévisions sont obtenues par l'intermédiaire d'un modèle linéaire auxiliaire .

$$(4) \qquad \boxed{y_\tau = \alpha\, x_\tau + \varepsilon_\tau \qquad \tau \in \mathbb{N}}$$

comportant pour simplifier une seule variable explicative x :

Ce modèle annexe doit simplement être considéré comme un outil permettant de calculer des prévisions.

Plaçons nous alors au début de la période t et supposons que l'on dispose de données sur $y_1,\dots,y_{t-1}$, $x_1,\dots,x_t$. La variable x va pouvoir servir d'indicateur avancé pour prévoir par régression la variable y_t . Appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires au modèle (4) pour les dates $\tau = 1,\dots,t-1$, on détermine un estimateur du paramètre α :

$$(5) \qquad \boxed{\hat{\alpha}_t = \frac{\sum_{\tau=1}^{t-1} x_\tau y_\tau}{\sum_{\tau=1}^{t-1} x_\tau^2}}$$

La prévision de y_t déduite du modèle auxiliaire est :

$$(6) \qquad \boxed{\tilde{y}_t = \hat{\alpha}_t \; x_t}$$

Une fois effectuée cette prévision, celle-ci influence la valeur de la variable endogène de la date t par l'intermédiaire de l'équation (1) : $y_t = a\,\tilde{y}_t + u_t$.
Au début de la période suivante, on dispose des données $y_1,\dots,y_t$, $x_1,\dots,x_{t+1}$; la valeur du coefficient de régression estimé est alors révisée. Elle est donnée par :

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \frac{\sum_{\tau=1}^{t} x_\tau y_\tau}{\sum_{\tau=1}^{t} x_\tau^2} = \frac{\sum_{\tau=1}^{t-1} x_\tau y_\tau + x_t y_t}{\sum_{\tau=1}^{t} x_\tau^2}$$

Notons : $b_t = \sum_{\tau=1}^{t} x_\tau^2$. Nous obtenons la formule de mise à jour :

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \frac{b_{t-1}\,\hat{\alpha}_t + x_t\,y_t}{b_t} = \frac{b_{t-1}\,\hat{\alpha}_t + x_t\,(a\,\tilde{y}_t + u_t)}{b_t}$$

$$= \frac{b_{t-1}\,\hat{\alpha}_t + x_t^2\,a\,\hat{\alpha}_t + x_t\,u_t}{b_t}$$

$$= \hat{\alpha}_t\,\frac{b_{t-1} + a(b_t - b_{t-1})}{b_t} + \frac{x_t\,u_t}{b_t}$$

Il y a donc pendant l'ajustement modification continuelle des coefficients $\hat{\alpha}_t$. Ce processus de révision doit évidemment être initialisé.

Nous notons $\hat{\alpha}_2$ cette valeur initiale. Celle-ci peut être aléatoire, par exemple être déjà un estimateur, ou être déterministe.

b. <u>Le modèle limite</u>.

Comme nous le verrons, le processus d'apprentissage permet, sous certaines conditions, d'obtenir la convergence vers le modèle à anticipations rationnelles dans lequel l'information correspond à la variable exogène x_t utilisée dans la régression auxiliaire. Ce modèle est :

$$\boxed{\bar{y}_t = a\,E(\bar{y}_t / x_t) + u_t} \tag{7}$$

La valeur de la régression linéaire $E(\overline{y}_t/x_t)$ est, comme nous l'avons vu en (3), donnée par :

$$E(\overline{y}_t/x_t) = \frac{1}{1-a} E(u_t/x_t)$$

Dans la suite, nous notons : $c_t = \frac{E(u_t\ x_t)}{E(x_t^2)}$ le coefficient de régression linéaire de u_t sur x_t. Nous pouvons alors écrire $u_t = c_t\ x_t + v_t$, où v_t résidu de la régression est caractérisé par la condition :

$$E\ v_t\ x_t = 0 .$$

Lorsque $c_t = o\ \forall\ t$, la variable utilisée dans la régression auxiliaire est non corrélée avec le processus $u_t = v_t$. Il s'agit d'une prévision effectuée en utilisant une information extérieure au modèle (ou "sunspot").

Lorsque $v_t = o\ \forall\ t$, l'information contenue dans x_t équivaut à la connaissance de u_t. Il y a utilisation complète de l'information sur les exogènes du modèle.

Dans le cas général $c_t \neq o$, $v_t \neq o$, il s'agit d'une prévision faite en utilisant par exemple certaines composantes de z_1 et z_2.

Prenant en compte la décomposition de u_t dans l'équation d'évolution des coefficients $\hat{\alpha}_t$, nous avons :

$$(8) \qquad \hat{\alpha}_{t+1} = \hat{\alpha}_t \frac{b_{t-1} + a(b_t - b_{t-1})}{b_t} + \frac{c_t \, x_t^2}{b_t} + \frac{x_t \, v_t}{b_t}$$

c. <u>Une hypothèse sur les processus x et u</u> .

Dans la suite, nous supposons que la liaison entre x et u est stationnaire ;

<u>Hypothèse 1</u> : Le coefficient de régression c_t est indépendant de t : $c_t = c$, $\forall\, t$.

Le coefficient dans la régression linéaire de $\bar{y}_t$ sur x_t est $\frac{c}{1-a}$ et vérifier la convergence du processus d'apprentissage vers la solution du modèle (7) équivaut à montrer que : $\hat{\beta}_t = \hat{\alpha}_t - \frac{c}{1-a}$ tend vers o . Effectuant ce changement de paramètre dans l'équation d'évolution, nous obtenons :

$$(9) \qquad \boxed{\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t \frac{b_{t-1} + a(b_t - b_{t-1})}{b_t} + \frac{x_t \, v_t}{b_t}}$$

Si nous notons : $d_t = \sum_{\tau=1}^{t} x_\tau \, v_\tau$, nous avons de manière équivalente :

$$(10) \qquad \boxed{\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t \frac{b_{t-1} + a(b_t - b_{t-1})}{b_t} + \frac{d_t - d_{t-1}}{b_t}}$$

4. ETUDE DE LA CONVERGENCE.

Pour montrer la convergence de $\hat{\beta}_t$ vers o , il nous faut faire des hypothèses sur les suites b_t et d_t . Plaçons nous dans le cas simple où le processus (x_t, u_t) serait stationnaire ergodique :

$\frac{b_t}{t} = \sum_{\tau=1}^{t} \frac{x_\tau^2}{t}$ tendrait presque sûrement (p.s) vers $E\, x_t^2$,

qui est indépendante de t .

On aurait donc : $b_t \xrightarrow{ps} \infty$ et $\frac{b_{t-1}}{b_t} \xrightarrow{ps} 1$

De même $\frac{d_t}{t} = \sum_{\tau=1}^{t} \frac{x_\tau\, v_\tau}{t}$ tendrait presque sûrement vers $E\, x_t\, v_t = o$ et donc $\frac{d_t}{b_t} \xrightarrow{ps} o$.

Nous ferons donc les hypothèses suivantes sur les suites b_t et d_t :

<u>Hypothèse 2</u> : i) $b_t \xrightarrow{ps} \infty$

ii) $\frac{b_{t-1}}{b_t} \xrightarrow{ps} 1$

iii) $\frac{d_t}{b_t} \xrightarrow{ps} o$

Ces conditions peuvent évidemment être satisfaites avec des processus non stationnaires.

Le résultat principal de cet article est le suivant :

PROPRIETE 1 : Sous les hypothèses 1 et 2 la suite $\hat{\beta}_t$ converge presque sûrement vers o pour toute valeur initiale $\hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_2 - \frac{c}{1-a}$ si et seulement si $a < 1$.

Preuve : Voir Appendice.

Ce résultat de convergence est en fait obtenu sous des hypothèses faibles. Les conditions i) et iii) de l'hypothèse 2 sont en effet équivalentes aux conditions habituelles de convergence de l'estimateur des moindres carrés ordinaires du coefficient de régression c et apparaissent donc comme une exigence minimale. Ces conditions doivent être comparées à celles très fortes (bruit blanc et normalité) utilisées par Bray (1982) dans un contexte similaire.

L'hypothèse 1 implique une certaine stationnarité de la liaison entre u_t et x_t. Elle empêche de choisir comme variable auxiliaire une valeur retardée de y comme $x_t = y_{t-1}$. En effet, si le processus u est par exemple stationnaire, le processus y qui dépend des valeurs révisées $\hat{\alpha}_t$ ne l'est généralement pas.

Finalement, nous pouvons remarquer que, dans le cas du marché agricole, le coefficient a , égal à $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, est négatif, donc en particulier satisfait la condition nécessaire et suffisante de convergence : $a < 1$.

La suite $\hat{\alpha}_t$ converge vers $\frac{c}{1-a}$; on peut donc penser que la prévision $\tilde{y}_t = \hat{\alpha}_t \, x_t$ se rapproche de $\hat{y}_t = \frac{c \, x_t}{1-a}$ et y_t de la solution du modèle à anticipations rationnelles $\bar{y}_t = \frac{a\,c}{1-a} \, x_t + u_t$. Comme $y_t - \bar{y}_t = a \, \tilde{y}_t + u_t - (a \, \hat{y}_t + u_t) = a \, (\tilde{y}_t - \hat{y}_t)$, il revient au même de vérifier la convergence des anticipations ou la convergence des réalisations.

i) La convergence presque sûre vers o est évidemment satisfaite si les variables x_t sont uniformément bornées.

ii) Dans le cas général, on a la propriété suivante :

<u>PROPRIETE 2</u> : Sous les hypothèses 1 et 2, si $a < 1$, si le processus x est stationnaire au second ordre, l'écart $\tilde{y}_t - \hat{y}_t$ tend en probabilité vers o .

<u>Preuve</u> : Comme : $\frac{\tilde{y}_t}{\hat{y}_t} = \frac{\hat{\alpha}_t \; x_t}{\frac{c}{1-a} \, x_t} = \frac{\hat{\alpha}_t}{\frac{c}{1-a}}$, on déduit de la propriété 1 que le rapport $\frac{\tilde{y}_t}{\hat{y}_t}$ tend presque sûrement, donc en probabilité, vers 1.

D'autre part le processus $\hat{y}$ est stationnaire au second ordre ; on peut écrire : $\forall$ M,t $P(|\hat{y}_t| > M) < \frac{Ey_t^2}{M^2}$.
On obtient alors :

$$P[|\tilde{y}_t-\hat{y}_t|>\eta] < P(|\hat{y}_t| > M) + P[|\tilde{y}_t-\hat{y}_t| > \eta, |\hat{y}_t| < M]$$

$$< \frac{E(\hat{y}_t^2)}{M^2} + P[|\tilde{y}_t-\hat{y}_t| > \frac{\eta|\hat{y}_t|}{M}]$$

$$= \frac{E(\hat{y}_t^2)}{M^2} + P[|\frac{\tilde{y}_t}{\hat{y}_t} - 1| > \frac{\eta}{M}]$$

Pour tout M fixé, le terme $P[|\frac{\tilde{y}_t}{\hat{y}_t} - 1| > \frac{\eta}{M}]$ tend vers o lorsque t tend vers l'infini. On en déduit que :
$\limsup_{t \to \infty} P[|\tilde{y}_t - \hat{y}_t| > \eta] < \frac{E\,y_t^2}{M^2}$. Comme cette inégalité est valable pour tout M , on obtient $\lim_{t\to\infty} P[|\tilde{y}_t - \hat{y}_t| > \eta] = 0$, c'est-à-dire la convergence en probabilité recherchée.

C.Q.F.D.

5. CONCLUSION

Ce résultat de convergence peut s'intepréter de diverses manières :

i) il montre d'abord que des agents anticipant par régression d'une manière extérieure au modèle, c'est à dire *sans connaissance de celui-ci*, peuvent se révéler asymptotiquement rationnels. La rationalité peut donc apparaître comme limite de comportement raisonnables, mais non rationnels.

ii) Nous voyons ensuite que si l'agent utilise la variable x, parce qu'il pense a priori qu'elle est liée avec y, cette corrélation se révèle a posteriori satisfaite. Ceci rejoint les résultats obtenus sur les "prophéties autoréalisatrices" (Azariadis - Guesnerie (1982)).

Le résultat de convergence peut aussi être utilisé dans un but de simulation en suivant une démarche analogue à celle de Fair-Taylor (1983).

Supposons que nous disposions de données sur x et u : $x_1,\dots,x_T$ $u_1,\dots,u_T$. Nous avons deux façons d'approcher une réalisation de la solution $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_T$ correspondant à une valeur donnée de a $(a < 1)$.

La première consiste à estimer directement c en régressant u sur x. Si $\hat{c}_T$ désigne l'estimation obtenue, $\bar{y}_t$ est alors approché par : $y_{tT} = \frac{a\,\hat{c}_T}{1-a}\,x_t + u_t$.

La seconde consiste à utiliser l'approche par régression décrite dans cet article. Cette seconde approche conduit à de bonnes approximations de $\bar{y}_t$ pour les valeurs de l'indice t assez grandes.

Si nous supposons que T peut varier, il est nécessaire de mettre à jour l'estimation de c , chaque fois qu'une observation nouvelle est disponible. Il est alors facile de voir que, dans un tel cas de révisions continuelles, les deux approches nécessitent le même nombre de régressions.

Dans le cas d'un modèle non linéaire, comme par exemple

$$y_t = f[E(y_t/x_t), u_t]$$

il n'est généralement pas possible de trouver la forme explicite de la solution. Ceci interdit alors l'emploi de la première approche de simulation ; la seconde par contre resterait utilisable, à condition que les propriétés de convergence soient valables dans le cas non linéaire.

APPENDICE

CONVERGENCE DE LA SUITE $\hat{\beta}_t$

Expression explicite de $\hat{\beta}_{t+1}$

On a : $$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t \left[\frac{b_{t-1} + a(b_t - b_{t-1})}{b_t}\right] + \frac{d_t - d_{t-1}}{b_t}$$

$$= \hat{\beta}_t \left[1 + (a-1)\frac{b_t - b_{t-1}}{b_t}\right] + \frac{d_t - d_{t-1}}{b_t}$$

Nous obtenons alors par remplacement récursif :

$$\hat{\beta}_{t+1} = \sum_{\tau=2}^{t} \left\{ \prod_{s=\tau+1}^{t} \left[1 + (a-1)\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right] \frac{d_\tau - d_{\tau-1}}{b_\tau} \right\}$$
$$+ \hat{\beta}_2 \prod_{s=2}^{t} \left[1 + (a-1)\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right]$$

avec la convention : $\prod_{s=t+1}^{t} \left[1 + (a-1)\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right] = 1$

Convergence p.s vers 0 de $\prod_{s=2}^{t} \left[1 + (a-1)\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right]$

Comme $\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s} = \frac{x_s^2}{b_s}$ est pósitif, le produit $\prod_{s=2}^{t}\left[1+(a-1)\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right]$

est supérieur à 1 , lorsque $a > 1$.
Dans ce cas, il ne peut évidemment tendre vers o .

Dans le cas contraire $a < 1$, nous pouvons remarquer que l'étude du comportement asymptotique du produit équivaut à celle de la série de terme général $\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}$, puisque $\frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}$ tend vers o , lorsque s tend vers l'infini.

Nous pouvons pour faire cette étude utiliser le lemme d'Abel (Chung (1968) p. 117) :

<u>Lemme</u> : Si (a_s) et (b_s) sont deux suites et si la suite S_t est définie par : $S_o = o$, $S_t = \sum_{s=1}^{t} \frac{a_s}{b_s}$, on a :

$$\frac{1}{b_t} \sum_{s=1}^{t} a_s = - \frac{1}{b_t} \sum_{s=1}^{t} S_s (b_{s+1} - b_s) + \frac{b_{t+1}}{b_t} S_t$$

Posons : $a_s = b_s - b_{s-1}$, on déduit du lemme que :

$$1 - \frac{b_o}{b_t} = - \frac{1}{b_t} \sum_{s=1}^{t} S_s (b_{s+1} - b_s) + \frac{b_{t+1}}{b_t} S_t .$$

La série S_t est à termes positifs ; pour chaque état de la nature ω sa limite ne peut donc être qu'une limite finie $\ell(\omega)$ ou $+\infty$.

Sur l'ensemble de convergence vers une limite finie, on a :

$$\lim_t \left(1 - \frac{b_o}{b_t}\right) = \lim_t \left(- \frac{1}{b_t} \sum_{s=1}^{t} S_s(b_{s+1} - b_s) + \frac{b_{t+1}}{b_t} S_t\right)$$

Comme $S_s \to \ell$, $b_t \to + \infty$, $\frac{b_{t+1}}{b_t} \to 1$, on en déduit que :

$$1 = - \ell \lim_t \frac{1}{b_t} \sum_{s=1}^{t} (b_{s+1} - b_s) + \ell = -\ell + \ell = o ,$$

d'où une contradiction. L'ensemble de convergence vers une limite finie est donc de probabilité nulle ; la suite S_t converge ainsi presque surement vers $+ \infty$

C.Q.F.D.

La convergence presque sûre de S_t vers $+ \infty$ entraîne la convergence presque sûre de $\prod_{s=2}^{t} \left(1 + (a-1) \frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right)$ vers o .
Nous avons donc le résultat suivant

PROPRIETE : La suite $\prod_{s=2}^{t} \left(1 + (a-1) \frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right)$ tend presque sûrement vers o , si et seulement si $a < 1$.

Convergence p.s vers o du premier terme.

Ce premier terme est égal à :

$$A_t = \sum_{\tau=2}^{t} \prod_{s=\tau+1}^{t} \left(1 + (a-1) \frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right) \frac{d_\tau - d_{\tau-1}}{b_\tau}$$

Remarquons d'abord que chaque élément de la somme :
$\prod_{s=\tau+1}^{t} \left(1 + (a-1) \frac{b_s - b_{s-1}}{b_s}\right) \frac{d_\tau - d_{\tau-1}}{b_\tau}$ dépend de t et d'après

la démonstration précédente tend vers o p.s, lorsque t tend vers l'infini. La difficulté vient du fait que A_t comporte un nombre croissant vers l'infini de termes tendant chacun vers o .

On a : $$A_t = \sum_{\tau=2}^{t} \left\{ \prod_{s=\tau+1}^{t} \left(\frac{b_{s-1}}{b_s}\right) \prod_{s=\tau+1}^{t} \left[\frac{b_s}{b_{s-1}} + (a-1)\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right] \frac{d_\tau - d_{\tau-1}}{b_\tau} \right\}$$

$$= \frac{1}{b_t} \sum_{\tau=2}^{t} \left\{ (d_\tau - d_{\tau-1}) \prod_{s=\tau+1}^{t} \left(1 + a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{b_t} \sum_{\tau=1}^{t} d_\tau \left[\prod_{s=\tau+1}^{t} \left(1+a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) - \prod_{s=\tau+2}^{t} \left(1+a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) \right]$$

avec la "convention : $\prod_{s=2}^{t} \left(1+a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) = o$, $\prod_{s=t+2}^{t} \left(1+a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) = o$"

Simplifiant, on obtient :

$$A_t = \frac{1}{b_t} \sum_{\tau=1}^{t} d_\tau \prod_{s=\tau+2}^{t} \left(1+a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) a\,\frac{b_{\tau+1} - b_\tau}{b_\tau}$$

$$A_t = \frac{a}{b_t} \sum_{\tau=1}^{t} \frac{d_\tau}{b_\tau} \prod_{s=\tau+2}^{t} \left(1 + a\,\frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) (b_{\tau+1} - b_\tau)$$

Plaçons nous sur l'ensemble de probabilité 1 pour lequel :
$b_t \to \infty$, $\frac{b_{t-1}}{b_t} \to 1$ et $\frac{d_t}{b_t} \to o$.
On a donc :
i) $\forall\, \varepsilon\ \exists\, T_o : \forall\, s > T_o : \left|\frac{d_s}{b_s}\right| < \varepsilon$

ii) $\exists\ T_1 \ :\ \forall\ s > T_1 \qquad \left|\dfrac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right| < \dfrac{1}{|a|}$

iii) $\forall\ \gamma > 1 \ :\ \exists\ T_2 \ :\ \forall\ s > T_2 \ :\ \dfrac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}} < \gamma\, \dfrac{b_s - b_{s-1}}{b_s}$

Prenons alors $T = \mathrm{Max}\ (T_o, T_1, T_2)$. On peut décomposer A_t en faisant apparaître les termes d'indices inférieurs à T :

$$B_{tT} = \frac{a}{b_t} \sum_{\tau=1}^{T} \frac{d_\tau}{b_\tau} \prod_{s=\tau+2}^{t} \left(1 + a\, \frac{b_s - b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) (b_{\tau+1} - b_\tau)$$ et ceux

d'indices supérieurs regroupés dans C_{tT} :

$$A_{tT} = B_{tT} + C_{tT}$$

Comme B_{tT} tend vers o avec t tendant vers l'infini (nombre fini de termes, tendant chacun vers o), il suffit de montrer que C_{tT} tend vers o , uniformément en T .

1°) Considérons d'abord le cas où a est négatif.
On a $|C_{tT}| < \dfrac{|a|\varepsilon}{b_t} \displaystyle\sum_{\tau=T+1}^{t} (b_{\tau+1} - b_\tau) = |a|\varepsilon\, \dfrac{b_t - b_{T+1}}{b_t}$

Comme $\dfrac{b_t - b_{T+1}}{b_t}$ tend vers 1 , $\limsup |C_{tT}| < |a|\varepsilon$

On a donc : $\limsup A_t = \limsup |C_{tT}| < |a|\varepsilon$
Comme ε peut être choisi quelconque, on a bien dans ce cas la convergence vers o .

2°) Il reste à étudier le cas $o < a < 1$.

Dans ce cas :

$$|C_{tT}| < \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \prod_{s=\tau+2}^{t} \left(1 + a\,\frac{b_s-b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$< \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \exp\left(a \sum_{s=\tau+2}^{t} \frac{b_s-b_{s-1}}{b_{s-1}}\right) (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$< \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \exp\left(a\,\gamma \sum_{s=\tau+2}^{t} \frac{b_s-b_{s-1}}{b_s}\right) (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$< \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \exp\left(a\,\gamma \sum_{s=\tau+2}^{t} \int_{b_{s-1}}^{b_s} \frac{dx}{x}\right) (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$= \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \exp\left(a\,\gamma \int_{b_{\tau+1}}^{b_t} \frac{dx}{x}\right) (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$= \frac{|a|\varepsilon}{b_t} \sum_{\tau=T+1}^{t} \left(\frac{b_t}{b_{\tau+1}}\right)^{a\gamma} (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$= |a|\varepsilon(b_t)^{a\gamma-1} \sum_{\tau=T+1}^{t} \frac{1}{(b_{\tau+1})^{a\gamma}} (b_{\tau+1}-b_\tau)$$

$$< |a|\varepsilon(b_t)^{a\gamma-1} \sum_{\tau=T+1}^{t} \int_{b_\tau}^{b_{\tau+1}} \frac{dx}{x^{a\gamma}}$$

$$< |a|\varepsilon\, b_t^{a\gamma-1} \int_{b_{T+1}}^{b_{t+1}} \frac{dx}{x^{a\gamma}}$$

$$< |a|\varepsilon\, \frac{b_t^{a\gamma-1}}{-a\gamma+1} \left(\frac{1}{b_{t+1}^{a\gamma-1}} - \frac{1}{b_{T+1}^{a\gamma-1}}\right)$$

Si $a < 1$, γ peut être choisi tel que : $a\gamma < 1$.

Comme $b_t \to \infty$ et que $a\gamma-1 < o$, le majorant tend vers

$\frac{|a|\varepsilon}{1-ac}$, indépendant de T . Comme ε peut être choisi aussi

petit que l'on veut, nous obtenons ici encore $A_t \to o$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

Azariadis, C et Guesnerie, R. (1982)
Prophéties créatrices et persistance des théories, Revue Economique, 33, 787-806.

Bray, M. (1981)
Convergence to rational expectations equilibrium, Mimeo.

Bray, M. (1982)
Learning, estimation and the stability of rational expectations, Journal of Economic Theory 26, 318-340.

Champsaur, P. (1982)
Stabilité des équilibres avec anticipations rationnelles, Discussion Paper, CORE.

Chung, K.L. (1968)
A course in probability theory, Harcourt-Brace and World.

Fair, R. et J. TAYLOR (1983)
Solution and maximum likelihood estimation of dynamic non linear rational expectations models.
Econometrica 51, 1169-1185.

Gourieroux, C., Laffont J.J. et A. MONFORT (1983)
Revision adaptative des anticipations et convergence vers les anticipations rationnelles.
Revue d'Economie Appliquée, 36.

Muth, J. (1961)
Rational expectations and the theory of price movements, Econometrica 29, 315-335.

Nerlove, M. (1958)
Adaptative expectations and Cobweb phenomena, Quarterly Journal of Economics 73, 227-240.