SEPTEMBRE 1982

N° 8218

REVISION ADAPTATIVE DES ANTICIPATIONS ET CONVERGENCE VERS LES ANTICIPATIONS RATIONNELLES

par

C. GOURIEROUX*, J.J. LAFFONT** et A. MONFORT***

* Université Paris-DAUPHINE et CEPREMAP.

** Université TOULOUSE I et CERAS.

*** Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique.

RESUME

Dans cette étude, nous examinons dans quelle mesure un mécanisme de révision adaptative des anticipations permet de converger vers une solution stationnaire du modèle à anticipation rationnelle. On montre que cette propriété de convergence est vraie pour une large gamme de mécanismes adaptatifs, en particulier celui de BRAY, à condition que les variables exogènes du modèle soient non autocorrélées et que le modèle à anticipation rationnelle admette une solution stationnaire unique. Quand l'une des deux dernières conditions n'est pas vérifiée, la propriété de convergence n'est plus vraie ; en particulier, cette approche ne permet pas de sélectionner une solution stationnaire quand celle-ci n'est pas unique.

ABSTRACT

In this paper, we examine to what extent an adaptative revision mechanism for the expectations allows the convergence to a stationary solution of a rational expectation model. It is shown that the convergence is true for a large range of adaptative mechanisms, provided that the exogenes variables are not serially correlated and that the rational expectation model has a unique stationary solution. If one of these conditions does not hold, the convergence property is no longer satisfied ; in particular, this approach does not provide a selection criterion, when the stationary solution is not unique.

L'intérêt de l'hypothèse d'anticipation rationnelle, au moins comme cas limite, est aujourd'hui reconnu . Dans Gourieroux, Laffont et Monfort (1981) nous avons montré que dans les modèles dynamiques, même linéaires, il existe une multiplicité enbarrassante de solutions. Notre panorama des critères ad hoc de sélection d'une solution nous a conduits à la conclusion selon laquelle l'hypothèse des anticipations rationnelles n'est pas suffisamment contraignante dans les modèles dynamiques pour constituer une théorie complète.

Il est tentant de substituer à l'hypothèse des anticipations rationnelles une théorie adaptative de révision des anticipations et d'examiner si ces anticipations adaptatives convergent vers une solution particulière du modèle à anticipations rationnelles. On aurait ainsi une justification asymptotique de l'hypothèse des anticipations rationnelles ainsi qu'un critère de sélection. C'est à un début d'étude de cette question que cette note est consacrée.

Le problème de la convergence vers un équilibre à anticipations rationnelles a fait l'objet de deux types d'études. Une première voie consiste à supposer que l'agent économique connaît la fonction de vraisemblance qui décrit le processus stochastique générant les observations. Il faut noter que cette fonction de vraisemblance dépend des anticipations de l'agent et évolue avec ses révisions d'anticipations. Le problème est donc plus complexe que le problème classique du statisticien qui estime des paramètres à partir d'observations générées par un modèle exogène. De plus, lorsqu'il existe plusieurs agents le processus générant les observations d'un agent donné dépend des anticipations des autres agents ; pour représenter une situation d'équilibre, on a en général considéré l'équilibre de Nash des représentations individuelles sous la forme de fonctions de vraisemblance. Les révisions bayésiennes d'anticipations qui utilisent les fonctions de vraisemblance correctes sont d'une extrême complexité et poussent le paradigme de l'homo economicus aux limites du raisonnable[(2)]. La deuxième approche consiste à postuler des révisions adaptatives des anticipations suffisamment simples pour être des représentations crédibles du comportement des agents économiques. On étudie alors le comportement asymptotique de ces révisions, qui est comparé à l'équilibre à anticipations rationnelles. La présente étude s'inscrit dans cette approche.

Dans la première section nous reprenons le modèle linéaire dynamique de Gourieroux et alii (1981) et nous rappelons la méthode de calcul de tous les équilibres à anticipations rationnelles. Nous considérons dans la deuxième section une classe très générale de processus de révisions adaptatifs qui comprend comme cas particuliers l'ajustement de Koyck et l'ajustement de Bray (1981). Dans la section 3 nous examinons sous quelles conditions les anticipations convergent en moyenne quadratique. Lorsqu'il y a une seule solution stationnaire, il y a de façon assez générale convergence, mais la limite peut ou non correspondre à la solution du modèle à anticipations rationnelles. En revanche quand il y a une infinité de solutions stationnaires, il n'y a pas convergence vers une de ces solutions.

Les résultats obtenus ne fournissent donc aucunement un critère de sélection lorsqu'il existe une infinité de solutions stationnaires. Ils conduisent plutôt à une grande méfiance vis-à-vis de modèles exhibant une infinité de solutions stationnaires. Cependant lorsqu'il n'existe qu'une seule solution stationnaire, les résultats obtenus suggèrent que le choix de cette solution peut être justifié par des arguments de stabilité, au moins dans les modèles non-autocorrélés.

1 - LE MODELE

La théorie monétaire, en postulant l'égalité de l'offre et de la demande de monnaie, conduit à l'équation suivante :

$$p_t = a\,x_t + z_t \tag{1}$$

où p_t est le niveau des prix à la date t

x_t est l'anticipation à la date t du niveau des prix de la date $t+1$

a est un paramètre positif

z_t est un processus stochastique décrivant l'offre de monnaie ; nous prendrons z_t sous la forme : $z_t = m + e_t$, où e_t est un bruit blanc.

Supposons tout d'abord que les anticipations soient rationnelles par rapport à l'information de la date t définie par :

$\mathcal{I}_t = \{z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots\}$; autrement dit, supposons que :

$$x_t = E(p_{t+1}/\mathcal{I}_t) \tag{2}$$

On en déduit que :

(3) $$p_t = a\,E(p_{t+1}/\mathcal{I}_t) + z_t$$

Comme nous l'avons expliqué dans Gourieroux et alii (1981), la solution complète de (3) est la somme d'une solution particulière de (3) et de la solution générale de l'équation sans second membre.

(4) $$p_t = a\,E(p_{t-1}/\mathcal{I}_t)$$

En multipliant les deux membres de l'équation par a^t , on obtient :

$$a^t\,p_t = a^{t+1}\,E(p_{t+1}/\mathcal{I}_t)$$

ou encore

(5) $$M_t = E(M_{t+1}/\mathcal{I}_t)$$

avec $M_t = a^t\,p_t$

Un processus M satisfaisant (5) est une martingale. La solution générale de (4) est donc :

$$p_t = \frac{1}{a^t}\,M_t \qquad \text{où } M_t \text{ est une martingale.}$$

Appelons p_t^0 une solution particulière de l'équation complète (3) ; celle-ci dépend évidemment des caractéristiques du processus stochastique z_t . La solution complète de (3) peut s'écrire :

(6) $$p_t = p_t^0 + \frac{1}{a^t} M_t$$

Lorsque $a < 1$ il est facile de vérifier qu'il existe une seule solution stationnaire. Le processus :

(7) $$p_t = \frac{m}{1-a} + e_t$$

est une solution stationnaire de (3) et c'est donc la seule.

Lorsque $a > 1$, la solution avant $\frac{m}{1-a} + e_t$ et la solution arrière $\frac{m}{1-a} - \frac{e_{t-1}}{a} - \frac{e_{t-2}}{a^2} - \ldots - \frac{e_{t-p}}{a^p} - \ldots$
sont des solutions stationnaires. Toute solution stationnaire, s'écrivant sous forme d'une moyenne mobile, est une combinaison de ces deux solutions

$$p_t = \frac{m}{1-a} + \lambda e_t + (1-\lambda)\left(-\frac{e_{t-1}}{a} - \ldots - \frac{e_{t-p}}{a^p} - \ldots\right)$$

2 - REVISION ADAPTATIVE DES ANTICIPATIONS

Nous remplaçons maintenant l'hypothèse d'anticipations rationnelles par l'hypothèse d'anticipations adaptatives décrite par l'équation ci-dessous :

(8) $$x_t - x_{t-1} = \frac{1}{f_t}[p_t - x_{t-1}]$$

Le coefficient de correction $\frac{1}{f_t}$ peut donc dépendre du temps. En substituant (8) dans (1) nous obtenons :

(9) $$(f_t - a)\, x_t = (f_t - 1)\, x_{t-1} + m + e_t$$

Si nous posons, $\tilde{x}_t = x_t - \frac{m}{1-a}$, (9) s'écrit :

(10) $$(f_t - a)\, \tilde{x}_t = (f_t - 1)\, \tilde{x}_{t-1} + e_t$$

ou, si $f_t - a \neq 0$,

(11) $$\tilde{x}_t = \frac{(f_t - 1)}{(f_t - a)}\, \tilde{x}_{t-1} + \frac{e_t}{(f_t - a)}$$

Soit $\tilde{x}_o$ l'anticipation initiale diminuée de $\frac{m}{1-a}$; on a en résolvant de proche en proche

(12) $$\tilde{x}_T = x_T - \frac{m}{1-a} = \tilde{x}_o \prod_{t=1}^{T} \frac{(f_t - 1)}{(f_t - a)} + \sum_{t=1}^{T} \frac{e_t}{(f_t - a)} \prod_{\tau=t+1}^{T} \frac{(f_\tau - 1)}{(f_\tau - a)}$$

$$= \tilde{x}_o \sum_{t=1}^{T} \frac{(f_t - 1)}{(f_t - a)} + \sum_{t=1}^{T} C_{tT}\, e_t$$

avec $C_{tT} = \frac{1}{(f_t - a)} \prod_{\tau=t+1}^{T} \frac{(f_\tau - 1)}{(f_\tau - a)}$

et la convention : $C_{TT} = \prod_{t=T+1}^{T} \frac{(f_t - 1)}{(f_t - a)} = 1$

L'étude du comportement asymptotique des anticipations est l'étude de la solution décrite par l'équation (12).

Avant de faire cette étude, il est intéressant de réécrire sous d'autres formes le mécanisme de révision précédent.

L'équation d'ajustement (8) peut être réécrite

(13) $$x_t = \frac{1}{f_t} p_t + (1 - \frac{1}{f_t}) x_{t-1}$$

Si $\frac{1}{f_t}$ est compris entre 0 et 1 , l'anticipation de la date t apparaît comme une combinaison convexe du prix actuel et de l'anticipation de ce prix faite à la date précédente. Plus f_t est grand, moins on tient compte de la denrière observation

L'anticipation x_t peut également être exprimée en fonction de la suite des prix passés et de l'anticipation initiale x_o

(14) $$x_t = \frac{1}{f_t} p_t + (1 - \frac{1}{f_t}) \frac{1}{f_{t-1}} p_{t-1} + (1 - \frac{1}{f_t}) (1 - \frac{1}{f_{t-1}}) \frac{1}{f_{t-2}} p_{t-2}$$

$$+ \dots + (1 - \frac{1}{f_t}) \dots (1 - \frac{1}{f_2}) \frac{1}{f_1} p_1 + (1 - \frac{1}{f_t}) \dots (1 - \frac{1}{f_2}) (1 - \frac{1}{f_1}) x_o$$

La formulation générale (8) contient les exemples suivants comme cas particuliers.

. Si $f_t = \rho$ avec $0 < \frac{1}{\rho} < 1$

$$x_t - x_{t-1} = \frac{1}{\rho}(p_t - x_{t-1})$$

Il s'agit de l'ajustement de Koyck

. Si $f_t = t$ (Bray (1981)), $x_t = \frac{\sum_{\tau=1}^{t} p_\tau}{t}$

l'anticipation est simplement la moyenne arithmétique des prix antérieurs à la date t .

3 - ETUDE DE LA CONVERGENCE

3.a Cas $0 < a < 1$; e_t bruit blanc

La solution stationnaire du modèle à anticipation rationnelle est dans ce cas : $p_t = \frac{m}{1-a} + e_t$ et correspond à une anticipation égale à $\frac{m}{1-a}$.

Examiner la convergence des x_t vers l'anticipation solution du modèle (3) revient donc à regarder si $\tilde{x}_t$ converge ou non vers 0 .

Propriété 1 : $\tilde{x}_t$ converge en moyenne quadratique vers 0 si et seulement si :

i) $A_{oT} = \sum_{t=1}^{T} C_{tT}^2$ tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini et

ii) $\prod_{t=1}^{T} \left(\frac{f(t) - 1}{f(t) - a} \right)$ tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini.

Preuve : Cette condition nécessaire et suffisante résulte de la décomposition (12) de $\tilde{x}_t$ en un terme déterministe et un terme aléatoire de moyenne nulle.

C.Q.F.D.

Etant donné un mécanisme de révision des anticipations, c'est-à-dire une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, la condition ii) est en pratique facile à vérifier. Il n'en est pas de même de i) et nous donnons ci-dessous une condition suffisante pour que A_{oT} tende vers 0 .

Propriété 2 : Si les hypothèses suivantes sont satisfaites

H1 : f est croissante

H2 : $f(t)$ tend vers l'infini, si t tend vers l'infini

H3 : $\forall\, k > 0 \ \frac{f(t+k)}{f(t)^2}$ tend vers 0 , quand t tend vers l'infini

H4 : $\int_1^{\infty} \frac{dt}{f(t)} = +\infty$

H5 : $2 - 2a - f'(t)$ est de signe constant, alors

A_{oT} tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini.

Preuve : Voir l'appendice

Comme nous nous intéressons simplement au comportement asymptotique de A_{oT} , il est clair que certaines des hypothèses précédentes n'ont besoin d'être vérifiées qu'à partir d'une certaine valeur t_o de t ; c'est le cas de H1 , H5 . Nous avons choisi $t_o = 1$ sans perte de généralité.

Les résultats précédents peuvent être appliqués à l'étude de certains mécanismes d'ajustement. Nous considérons par exemple le cas où :

$$f(t) = \rho\, t^{\alpha} (\mathrm{Log}\; t)^{\beta} \qquad \text{avec } \rho \geq 0 \;,\; \alpha \geq 0 \;,\; \beta \geq 0$$

<u>Propriété 3</u> : Les hypothèses H1,...,H5 sont satisfaites (à partir d'un certain rang) si et seulement si :

$0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geqslant 0$ (α et β non simultanément nuls)

ou si $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$

<u>Preuve</u> : H1 est trivialement satisfaite. H2 et H3 le sont dès que α et β ne sont pas simultanément nuls. H4 est la condition de non intégrabilité de $\frac{1}{f(t)}$ et est donc vérifiée si et seulement si : $0 \leq \alpha < 1$ et β quelconque ou si : $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.
La dernière condition H5 résulte de la convergence de la dérivée $f'(t)$ vers une constante ou vers $+\infty$, lorsque t tend vers l'infini.

C.Q.F.D.

<u>Propriété 4</u> : La condition ii) est satisfaite pour $f(t) = \rho\, t^{\alpha} (\mathrm{Log}\; t)^{\beta}$ $\rho \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ si et seulement si

$\alpha = \beta = 0$ et $\rho > \frac{a+1}{2}$

ou $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geqslant 0$ (α et β non simultanément nuls)

ou $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$

Preuve : 1er cas : $\alpha = \beta = 0$

La condition est satisfaite lorsque $\left| \frac{\rho - 1}{\rho - a} \right| < 1$ c'est-à-dire lorsque : $\rho > \frac{a+1}{2}$.

2ème cas : α et β non simultanément nuls.

Dans ce cas $\frac{f(t) - 1}{f(t) - a} = 1 + \frac{a - 1}{f(t) - a}$ tend vers 1, lorsque t tend vers l'infini.La convergence vers 0 de $\prod_{t=1}^{T} \left(\frac{f(t) - 1}{f(t) - a}\right)$ est alors équivalente à la convergence vers $-\infty$ de la série : $\sum_{t=1}^{T} \text{Log } (1 + \frac{a - 1}{f(t) - a})$, ou à la convergence vers $+\infty$ de la série de terme général $\frac{1}{f(t) - a}$.

Celle-ci a lieu si $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta > 0$ ou si $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.

C.Q.F.D.

Remarquons que dans les cas où il n'y a pas convergence vers 0 ,

Il nous reste à étudier plus en détails de cas de l'ajustement de Koyck $\alpha = \beta = 0$ avec $\rho > \frac{a+1}{2}$.

Propriété 5 : Si $\alpha = \beta = 0$ et $\rho > \frac{a+1}{2}$, il y a convergence de $\tilde{x}_t$ vers un processus stationnaire autorégressif d'ordre 1

Preuve : D'après la propriété 4 , il suffit de considérer le terme aléatoire de moyenne nulle. Celui-ci est égal à :

$$\sum_{t=1}^{T} e_t \frac{(\rho - 1)^{T-t}}{(\rho - a)^{T-t+1}} = \sum_{u=0}^{T-1} e_{T-u} \frac{(\rho - 1)^u}{(\rho - a)^{u+1}}$$

Lorsque T tend vers l'infini ce processus tend vers le processus autorégressif d'ordre 1 :

$$\sum_{u=0}^{\infty} e_{T-u} \left(\frac{\rho - 1}{\rho - a}\right)^u \frac{1}{\rho - a}$$

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant résumer les trois propriétés précédentes :

THEOREME 6 : Soit $f(t) = \rho\, t^{\alpha}(\text{Log } t)^{\beta}$ avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\rho \geq 0$

1) Si $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geqslant 0$ (α et β non simultanément nuls).
ou si $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$, il y a convergence des anticipations adaptatives vers l'anticipation rationnelle $\frac{m}{1-a}$.

2) Si $\alpha = \beta = 0$ et $\rho > \frac{a+1}{2}$, il y a convergence des anticipations adaptatives, mais la limite n'est pas l'anticipation rationnelle.

3) Dans les autres cas, il y a divergence.

La convergence des anticipations adaptatives vers l'anticipation rationnelle implique la convergence du processus des prix p_t vers l'unique solution stationnaire du modèle à anticipation rationnelle $\frac{m}{1-a} + e_t$

3.b Cas $0 < a < 1$, e_t moyenne mobile finie

Les résultats de la section précédente se généralisent directement au cas où le processus e_t est une moyenne mobile finie d'ordre q , $q \geq 1$.

On déduit maintenant qu'il y a convergence de $\tilde{x}_T$ vers 0 en moyenne quadratique , si et seulement si :

i') $A_{jT} = \sum_{t=1}^{T-j} C_{tT}\, C_{t+j,T}$ tend vers 0 , lorsque T tend vers l'infini, et ceci pour $j = 0,\ldots,q$ et

ii) $\prod_{t=1}^{T} \frac{f(t) - 1}{f(t) - a}$ tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini.

Les hypothèses H1,...,H5 sont également suffisantes pour que la condition i') soit satisfaite . (Voir l'appendice).

Dans le cas particulier du mécanisme $f(t) = \rho\, t^{\alpha} \operatorname{Log} t^{\beta}$ avec $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta > 0$ ou $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$, il y a donc encore convergence des anticipations adaptatives vers $\frac{m}{1-a}$. Cependant cette limite n'est plus dans ce cas l'anticipation rationnelle.
En effet dans le cas contraire on aurait simultanément : $p_t = \frac{m}{1-a} + e_t$ et $E(p_{t+1}/\mathcal{I}_t) = \frac{m}{1-a}$.
Ceci impliquerait : $E(e_{t+1}/\mathcal{I}_t) = 0$, ce qui est impossible pour un processus d'erreur de la forme moyenne mobile finie.

3.c <u>Cas $a > 1$</u>

Lorsque a est supérieur à 1 et si $f(t)$ tend vers $+\infty$, le rapport $\frac{f(t) - 1}{f(t) - a}$ est plus grand que 1 pour t suffisamment grand. Il en résulte que la condition ii) de la propriété 1 n'est pas satisfaite et donc que x_t ne converge pas vers $\frac{m}{1-a}$. On peut même noter que x_t ne converge pas dans L_2 puisque son espérance mathématique tend vers $+\infty$.

En particulier si e_t est un bruit blanc, p_t ne converge pas vers une des solutions stationnaires et donc un mécanisme de révision adaptatif des anticipations ne permet pas de sélectionner une de ces solutions.

Lorsque $f(t) = \rho$, le raisonnement du paragraphe 3.a se transpose facilement au cas $a > 1$. On voit que $\tilde{x}_t$ converge si $\rho < \frac{1+a}{2}$ mais la limite n'est pas l'anticipation rationnelle.

CONCLUSION

Cette étude indique clairement que la justification du choix d'une solution stationnaire d'un modèle à anticipations rationnelles, par des arguments de convergence des anticipations adaptatives, doit être très nuancée. Il est vrai que, si les variables exogènes du modèle ne sont pas autocorrélées et si le modèle à anticipation rationnelle admet une solution stationnaire unique, il y a convergence vers cette solution des variables endogènes générées par un modèle d'anticipations adaptatives, pour une large gamme de mécanismes adaptatifs. En revanche, si les variables exogènes sont autocorrélées ou si le modèle à anticipation rationnelle n'a pas de solution stationnaire unique, cette propriété de convergence n'est plus vérifiée.

APPENDICE

CONVERGENCE DE A_{jT} VERS 0 SOUS LES HYPOTHESES H1,...,H5

On a :

$$A_{jT} = \sum_{t=1}^{T-j} C_{tT}\, C_{t+j,T}$$

$$= \sum_{t=1}^{T-j} \left\{ \frac{1}{f(t) - a} \; \frac{1}{f(t+j) - a} \prod_{\tau=t+1}^{T} \frac{f(\tau) - 1}{f(\tau) - a} \prod_{\tau=t+j+1}^{T} \frac{f(\tau) - 1}{f(\tau) - a} \right\}$$

Comme : $y \leq \exp(y - 1)$, on en déduit que :

$$\frac{f(\tau) - 1}{f(\tau) - a} \leq \exp\left[\frac{f(\tau) - 1}{f(\tau) - a} - 1\right] = \exp\left[\frac{a - 1}{f(\tau) - a}\right]$$

Comme à partir d'un certain rang (pris égal à 1) $f(t) \geq a$, on obtient la majoration :

$$A_{jT} \leq \sum_{t=1}^{T-j} \frac{1}{f(t) - a} \; \frac{1}{f(t+j) - a} \exp\left\{(a - 1)\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{1}{f(\tau) - a} + \sum_{\tau=t+j+1}^{T} \frac{1}{f(\tau) - a}\right]\right\}$$

Utilisant alors la croissance de f et la positivité de cette fonction à partir d'un certain rang (pris égal à 1), on peut majorer les sommes par des intégrales.

Notons $F(T) = \int_1^T \frac{dt}{f(t)}$ une primitive de $\frac{1}{f}$, on a :

$$\exp\,(a - 1)\left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{1}{f(\tau) - a} + \sum_{\tau=t+j+1}^{T} \frac{1}{f(\tau) - a}\right]$$

$$\leq \exp(a-1)\left[\sum_{\tau=t+1}^{T}\frac{1}{f(\tau)} + \sum_{\tau=t+j+1}^{T}\frac{1}{f(\tau)}\right]$$

$$\leq \exp 2(a-1)\sum_{\tau=t+j+1}^{T}\frac{1}{f(\tau)}$$

$$\leq \exp 2(a-1)\int_{t+j+2}^{T}\frac{dt}{f(t)} = \exp(2a-2)\,[F(T) - F(t+j+2)]$$

D'où :

$$A_{jT} \leq \exp[(2a-2)F(T)]\sum_{t=1}^{T-j}\frac{\exp(2-2a)F(t+j+2)}{[f(t)-a][f(t+j)-a]}$$

$$A_{jT} \leq \exp[(2a-2)F(T)]\sum_{t=1}^{T-j}\frac{\exp(2-2a)F(t+j+2)}{[f(t)-a]^2}$$

Utilisant H2 et H3 , on voit alors que :

$$\forall\ \varepsilon \quad \exists\ T_0 : \forall\ t \geq T_0 \qquad \frac{f(t+j+2)}{[f(t)-a]^2} < \varepsilon$$

On peut alors écrire :

$$A_{jT} \leq \exp[(2a-2)F(T)]\sum_{t=1}^{T_0}\frac{\exp(2-2a)F(t+j+2)}{[f(t)-a]^2}$$

$$+\ \varepsilon\ \exp[(2a-2)F(T)]\sum_{t=T_0+1}^{T-j}\frac{\exp(2-2a)F(t+j+2)}{f(t+j+2)}$$

D'après H4 , F(T) tend vers l'infini avec T et le premier terme de la majoration tend donc vers 0 .

Examinons maintenant le second terme. Pour cela introduisons la fonction :

$$G(x) = \frac{\exp\,(2 - 2a)\,F(x)}{f(x)} .$$

Sa dérivée est : $$G'(x) = \exp\,[(2 - 2a)\,F(x)]\,\frac{2 - 2a - f'(x)}{f^2(x)}$$

D'après H5 , G est donc une fonction monotone, positive et on peut effectuer la majoration :

$$\sum_{t=T_0+1}^{T-j} \frac{\exp(2 - 2a)\,F(t+j+2)}{f(t+j+2)} \leq \int_{T_0+j+2}^{T+3} \frac{\exp\,(2 - 2a)\,F(t)}{f(t)}\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2 - 2a}\,\exp\,(2 - 2a)\,F(T+3)$$

Le second terme intervenant dans la majoration de A_{jT} est donc lui-même majoré par :

$$\varepsilon\,\exp\,(2 - 2a)\,[F(t+3) - F(T)]$$

$$\leq \varepsilon\,\exp\,(2 - 2a)\int_T^{T+3} \frac{dt}{f(t)}$$

$$\leq \varepsilon\,\exp\frac{(6 - 6a)}{f(T)}$$ à cause de la croissance de F

Ce terme tend vers 0 .

N O T E S

(1) Voir BLUME, BRAY et EASLEY (1982) numéro spécial du Journal of Economic Theory) pour plus de détails et pour une bibliographie sur le sujet.

(2) BRAY et KREPS (1981) ont montré dans un modèle très général que le théorème de convergence des martingales implique (dans un modèle avec un nombre fini d'états de la nature) la convergence des distributions a posteriori. Dans un exemple ils montrent de plus qu'avec suffisamment d'hypothèses de régularité il y a convergence vers les anticipations correctes.

REFERENCES

BRAY, M. (1981) : "Convergence to rational expectations equilibrium", Mimeo.

BRAY, M. et D.M. KREPS (1981) : "Rational learning and rational expectations", Mimeo, Graduate School of Business, Stanford.

BLUME, L.E., M. BRAY et D. EASLEY (1982) : "Introduction to the stability of rational expectations equilibrium", Journal of Economic Theory, 26, 313-317.

GOURIEROUX, C., J.J. LAFFONT et A. MONFORT (1981) : "Modèles linéaires avec anticipations rationnelles : solutions et critères de sélection", Cahiers du Séminaire d'Econométrie, 23, 1-46.