C E P R E M A P

AL/my

Septembre 1979

N° 7915

NOUVELLE SOLUTION AU PROBLÈME DE LA TRANSFORMATION : LE CAS DU CAPITAL FIXE ET DE LA RENTE

par

A. LIPIETZ

NOUVELLE SOLUTION AU PROBLEME DE LA TRANSFORMATION : LE CAS DU CAPITAL FIXE ET DE LA RENTE

Dans une note antérieure (1) nous avions montré que non seulement les "paradoxes" de la solution couramment admise au problème de la transformation des valeurs en prix de production (celle de F. Seton - M. Morishima) ne contredisaient nullement les intuitions de K. Marx, mais encore, nous avions développé une nouvelle solution à ce problème, dont la possibilité avait été indiquée par G. Duménil, solution vérifiant explicitement ce que nous avons appelé le "théorème de la transformation marxiste", c'est-à-dire :

Il existe un système de prix de production relatifs réalisant l'unicité du taux de profit. Exprimée dans un numéraire où la somme des prix est la somme des valeurs, la somme des profits est la somme des plus-values.

Les deux points nodaux de cette nouvelle solution étaient les suivants :

* la valeur de la force de travail est un droit sur une quantité d'heures de travail abstrait, à dépenser comme le travailleur l'entend, en échange de marchandises dont le prix est une valeur transformée.
* la "somme des prix" dont il s'agit est la somme des prix des marchandises qui représentent le produit du travail de la période, donc le produit net.

Rappelons la formalisation adoptée :

y, Y sont les vecteurs-produits net et brut
v est le covecteur des valeurs
p est le covecteur des prix
A est la matrice "technique" (tenseur 1-1) des a^i_j (quantité de bien i requise pour la production du bien j dans l'opération productive représentative de la branche).
ℓ est le covecteur des quantités de travail vivant requises

./.

w est la valeur de la force de travail qui produit une unité de travail abstrait (intensité et longueur de la journée de travail égales à l'unité)

$\gamma = 1+r$, r étant le taux de profit général.

On cherche une "péréquation capitaliste des valeurs", c'est-à-dire un système des "prix de production" constituant une réallocation de la valeur telle que la somme de prix (du produit net) soit la somme des valeurs, et que les taux de profits soient uniformes, ce qui s'exprime par les deux hypothèses :

$$H_1) \quad v.y = p.y$$
$$H_2) \quad p = \gamma\ (pA + w\ell)$$

Dans ce cas, où tout le capital est productivement consommé dans la période, et où il n'y a pas de rente, nous n'avions eu aucun mal à montrer l'existence et l'unicité d'un tel système de prix de production, et qu'il vérifiait le "théorème de la transformation marxiste".

Dès l'instant qu'est prise en compte l'existence du capital fixe, c'est-à-dire "d'input" dont la valeur s'incorpore au produit en plusieurs périodes de rotation du capital circulant, la situation se complexifie. Car le taux de profit ne dépend plus seulement des normes de production (vitesse de rotation comprise), mais encore de la pyramide des âges du capital fixe utilisé. Or cette pyramide, comme la structure macroéconomique du produit social, dépend du schéma d'accumulation en vigueur.

Lorsque nous avions défini le taux de rendement interne du capital dans une branche comme le rapport du flux de plus-value au stock de capital engagé sous forme fixe, constant-circulante, et variable (2) :

$$\rho = \frac{pl}{K_f+K_c+K_v} = \frac{e}{t(q+1)}$$

nous avions admis que, pour produire, il fallait disposer de tout le capital fixe, et l'avions évalué à sa valeur <u>neuve</u>. Mais la relation "technique" que définit l'opération productive représentative n'implique nullement que la quantité de capital fixe b_j^k nécessaire à la production de j figure intégralement à l'état de bâtiments ou machines neuves ! Si T_k est la période de rotation du bien capital fixe k, il est par exemple intuitif que dans un schéma de reproduction simple, la pyramide des âges sera uniforme : il y aura autant de machines neuves que de machine d'âge 1, 2, ... ou T_k-1.

./.

On peut admettre qu'une machine perd ("transmet") autant de valeur à chaque période de sa vie normale : disons qu'elle s'amortit linéairement en valeur. Qu'en est-il en prix de production ? C'est ce que nous allons d'abord calculer.

I - CALCUL DU PRIX DU CAPITAL FIXE USAGE.

Nous admettrons que chaque type k de machine s'amortit dans le même temps T_k dans toutes les branches où il est utilisé. Hypothèse raisonnable : une même fraiseuse s'use aussi vite quel que soit l'usage des tôles qu'elle perce. Appelons $p_{k,o}$ et $p_{k,t}$ les prix de la machine k à neuf, et au bout de t période (3). Evidemment $p_{k,T_k} = 0$. Le prix "normal" des éléments de capital fixe usagés doit être tels qu'ils puissent être revendus à ce prix et entrer à ce prix dans les coûts de production d'une autre entreprise. Quand un capitaliste évalue son avoir au bout d'une période de production, il doit évaluer, en prix "normaux", et son capital marchandise, et ce qui reste non-amorti de son capital productif (4).

Soit pas exemple une branche j où la production d'une unité de marchandise j nécessite un capital circulant dans la période et une quantité b_j^k de machine k. De même que plus haut, nous appellerons $b_j^{k,o}$, $b_j^{k,t}$... la quantité b_j^k de machines k à l'âge o, t... Supposons une opération entamée avec des machines neuves. Il en ressort le bien j, et l'entrepreneur conserve $b_j^{k,1}$ qu'il peut revendre ou réutiliser pour les périodes suivantes. Pour simplifier l'écriture de l'équation, nous noterons comme toujours γ = 1+r (r le taux de profit moyen), nous sous-entendons l'indice j, nous noterons $T = T_k$, et nous noterons PKC = prix du capital circulant engagé. On a :

$$p + p_{k,1}\, b^{k,1} = \gamma\, (PKC + p_{k,o}\, b^{k,o})$$

S'il recommence, l'équation de prix sera :

$$p + p_{k,2}\, b^{k,2} = \gamma\, (PKC + p_{k,1}\, b^{k,1})$$

En retranchant membre à membre ces équations, on a :

$$p_{k,1} - p_{k,2} = \gamma\, (p_{k,o} - p_{k,1})$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$p_{k,T-1} = \gamma\, (p_{k,T-2} - p_{k,T-1})$$

./.

Soit ε l'amortissement de la première année : $\varepsilon = p_{k,o} - p_{k,1}$. L'échelle des prix de capital fixe usagé sera de la forme :

$$\begin{array}{ccccccccc} p_{k,T} & & p_{k,3} & & p_{k,2} & & p_{k,1} & & p_{k,o} \\ \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- & ------ & -\!\!\!-\!\!\!+\!\!\!- & -\!\!\!-\!\!\!- & +\!\!\!- & -\!\!\!- & +\!\!\!- & -\!\!\!- & \dashv \\ o & & & \gamma^2\varepsilon & & \gamma\,\varepsilon & & \varepsilon & \end{array}$$

On voit que : $$p_{k,o} = \varepsilon\,[1+\gamma+\gamma^2+---+\gamma^{T-1}]$$

Ce qui s'écrit $$p_{k,o} = \varepsilon\,\frac{1-\gamma^T}{1-\gamma}$$

On peut alors calculer: $$p_{k,t} = p_{k,o} - \varepsilon\,[1+\gamma+---+\gamma^{t-1}]$$

soit :

$$\text{(I)} \qquad \boxed{p_{k,t} = \frac{\gamma^t-\gamma^T}{1\ -\gamma^T}\quad p_{k,o}}$$

Remarquons que l'amortissement normal, en prix de production, n'est ni linéaire ni dégressif (comme les amortissements fiscaux (5)) mais progressif : le capital fixe se dévalue lentement puis de plus en plus vite. Remarquons d'autre part que $p_{k,t}$ est une fonction croissante de γ, c'est-à-dire de r : le capital neuf s'amortit d'autant moins vite au début que le taux de profit est fort (6). Nous nous en servirons plus loin.

En fait, le capital fixe dans une branche ou une entreprise contient en proportion variable des machines de différents âges. Soit, pour une branche donnée j, $\alpha_j^{k,t}$ la part des machines (ou bâtiments) d'un type donné k d'âge t. En sous-entendant les indices k et j, on doit avoir :

$$\sum_{o}^{T-1} \alpha^t = 1.$$

Par exemple, pour une branche telle que celle dont nous venons de parler, et avec les mêmes notations simplifiées, l'équation des prix de production est donc :

$$\text{(II)} \quad p + \sum_{t=o}^{T-1} \alpha^t\ p_{k,t+1}\ b^k = \gamma\,[PKC + \sum_{t=o}^{T-1} \alpha^t\ p_{k,t}\ b^k]$$

./.

II - LE THEOREME DE LA TRANSFORMATION MARXISTE AVEC CAPITAL FIXE.

Nous allons maintenant transposer la démonstration du théorème de la transformation. Rappelons que dans la "nouvelle" solution au problème de la transformation (en fait, celle de Marx !), le calcul du taux de profit présuppose la donnée de la structure y ou Y de la production sociale. Cette fois, il faut présupposer en plus la donnée de la pyramide des âges du capital fixe : toutes choses qui dépendent du schéma d'accumulation, comme nous le verrons plus loin.

Les notions de "produit brut" et de "produit net" doivent d'abord être élargies. Par "produit brut" ou entend ce qui sort des opérations productives. Appelons Y le vecteur des marchandises produites par les branches. La dimension de ce vecteur doit être étendue aux marchandises de type capital fixe (machines, etc...). Sa production a exigé la consommation de biens en capital circulant (matrice A des a_j^i) et en capital fixe (matrice B des b_j^k), plus des quantités de travail vivant (covecteur des l_j). Mais la fraction $\alpha_j^{k,t}$ b_j^k des biens capitaux fixes k d'âge t a vieilli d'un an (voire, a été déclassée). Le "produit net" y, si l'on veut qu'il mesure l'exacte variation de la richesse sociale, doit repérer la variation des stocks de capital fixe aux différents âges de la pyramide. Le vecteur produit net devrait donc être complèté, dans une "seconde dimension", par la mention des variations des quantités $y^{k,t}$. Cela obligerait à manier des matrices "tridimentionnelles". Nous emploierons un formalisme plus simple.

Chaque fois qu'il le faudra, nous démultiplierons les lignes (ou les colonnes) de rang k en T_k lignes ou colonnes correspondantes. Dans ce cas, les symboles correspondant aux vecteurs, covecteurs et matrices seront coiffés d'une barre. Le vecteur Y, qui désigne en fait des niveaux d'activité des branches, ne comporte jamais, même barré, de terme non nul en $t \neq o$. De même, le nombre de colonnes (c'est-à-dire de branche) des matrices barrées n'augmente pas, mais le nombre de lignes augmente. De même, comme on la déjà vu, le nombre de colonnes du covecteur $\bar{p}$ s'augmente des termes $p_{k,t}$ (7). La matrice A n'a de coefficients non nuls que sur les lignes "biens circulants", et la matrice B que sur les lignes "biens capitaux fixes".

Appelons $\overline{\alpha\ B}$ la matrice qui a pour coefficient $\alpha_j^{k,t}$ b_j^k sur la ligne k,t, colonne j, et $\overline{\alpha\ B}^+$ la matrice qui a cette même valeur du coefficient mais pour la ligne k,t+1 (si elle existe !), colonne j. C'est la même matrice, mais "vieillie"

./.

d'un an ! Enfin, on appellera $\bar{I}$ la matrice ayant pour coefficient 1 sur la diagonale pour les colonnes correspondant aux biens circulants et, pour les colonnes correspondant au capital fixe k, sur la ligne k,o, les autres coefficients étant nuls.

Ce formalisme, compliqué à décrire, mais assez intuitif, nous permet de définir le produit net $\bar{y}$:

(III) $\bar{y} = \bar{Y} - \overline{AY} - (\overline{\alpha B} - \overline{\alpha B}^{+})\ \bar{Y}$

Ce qui se lit :

produit net = produit brut - cap. const. circul. consommé - amortissement physique.

Remarquons qu'en comptabilité on emploie souvent "capital fixe (ou immobilisations) brut" pour désigner le capital fixe à son prix "neuf", et "capital fixe net" pour désigner celui-ci amorti. Dans l'équation (II), le capital fixe est donc toujours évalué en net (mais à deux dates successives). L'équation (II) peut d'ailleurs se généraliser vectoriellement :

(II*) $\bar{p}\ (\bar{I} + \overline{\alpha B}^{+}) = (1+r)\ [\bar{p}(\bar{A} + \overline{\alpha B}) + w\ell]$

soit : $\bar{p} - (\bar{p}\bar{A} + w\ell) - \bar{p}\ (\overline{\alpha B} - \overline{\alpha B}^{+}) = r\ [(\bar{p}\bar{A} + w\ell) + \bar{p}\ \overline{\alpha\ B}]$

Ce qui se lit :

$$\underbrace{\underbrace{\text{prix de vente - P K C}}_{\text{cash-flow}} - \text{Amortissements}}_{\text{profit net}} = r\ (\underbrace{\text{P K C}}_{\text{capital circulant}} + \underbrace{\text{P K F N}}_{\text{capital fixe net}})$$

L'équation (II*) définit donc le taux de profit "en flux net sur stock net des amortissements".

Nous pouvons maintenant nous poser la question : existe-t-il un système de prix garantissant un tel taux de profit, uniforme dans toutes les branches ?

L'équation (II*), équivalente à l'hypothèse H_2, ne suffit pas à le définir. Il faut choisir un numéraire, en posant par exemple une hypothèse équivalente à H_1) : la somme des prix du produit net est égale à sa valeur. Or la valeur du produit net n'est autre que la valeur ajoutée dans la période, $\ell.Y$, et de même la somme des prix du produit net n'est autre que ce que les comptables nationaux appellent la "valeur ajoutée nette" (en prix, bien sûr), c'est-à-dire la somme des profits nets et des salaires de la période (8).

./.

Soit donc à résoudre le système d'équations en $\bar{p}$ et r

H$_1$) $\bar{p}.\bar{y} = \bar{v}.\bar{y}$ = constante

H$_2$) Equation II*

Ecrivons d'abord (II*) sous la forme :

$$\bar{p} = \gamma \bar{p}\, \bar{A} + \gamma\, w\ell + \bar{p}(\gamma\, \overline{\alpha B} - \overline{\alpha B}^+)$$

Pour chaque branche j et chaque bien du capital fixe k, le terme final s'écrit :

$$\sum_{t=o}^{T_k-1} \alpha_t\, (\gamma\, p_{k,t} - p_{k,t+1})\, b^k.$$

D'après la formule (I) des $p_{k,t}$, on calcule facilement (T étant ici mis pour T_k) :

$$\gamma p_{k,t} - p_{k,t+1} = p_{k,o}\, \gamma^T \frac{1-\gamma}{1-\gamma^T}$$

Ce second membre, strictement croissant en γ, ne s'exprime par ailleurs qu'en $p_{k,o}$. Nous pouvons dès lors simplifier considérablement le formalisme, en supprimant toutes les lignes et les termes en $t \neq o$. Posons :

(IV) $$\omega^k\, (\gamma) = \sum_{o}^{T-1} \alpha^k_{j,t}\, \gamma^T \frac{1-\gamma}{1-\gamma^T} = \gamma^T \frac{1-\gamma}{1-\gamma^T} \quad (\text{avec } T = T_k)$$

Définisons comme plus haut la matrice $\omega(\gamma)B$. La matrice $A + \omega(\gamma)B$ est une matrice carrée strictement croissante en γ. L'équation (II*) s'écrit :

(II**) $$p = \gamma\, p\, (A+\omega B) + \gamma\, w\ell.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante, par développement en série, sous la réserve de l'inversibilité de (A+ωB) :

(II***) $$p = \gamma\, w\ell \sum_{o}^{\infty} \gamma^n\, (A+\omega B)^n$$

Le second nombre est strictement croissant en γ. Comme on veut par ailleurs :

H$_1$) $\bar{p}.\bar{y} = \bar{v}.\bar{y}$

on voit, par un raisonnement exactement calqué sur celui de notre article précédent, que ce système admet une et une seule solution en γ, y et α étant donnés, et que γ est compris entre 1 et le rayon de convergence de la série en (II***).

./.

Il existe donc un et un seul système de prix, un et un seul taux de profit $r = \gamma - 1$ réalisant la péréquation capitaliste. Ce taux dépend, non seulement de w (donc de e), des coefficients techniques et de la pondération des branches (par Y), mais encore de la pyramide des âges du capital fixe. Par ailleurs on a, en revenant au formalisme développé :

$$\begin{aligned} \text{somme des profits nets} &= \bar{p}.\bar{y} - w\,\bar{\ell}.\bar{Y} \\ &= \bar{v}.\bar{y} - w\,\bar{\ell}.\bar{Y} \\ &= \bar{\ell}.\bar{Y} - w\,\bar{\ell}.\bar{Y} \\ &= e\,w\,\bar{\ell}.\bar{Y} = \text{somme des plus values} \end{aligned}$$

Nous avons donc étendu le théorème de la transformation marxiste :

Dans le système de prix de production où la somme des prix du produit net est égale à sa valeur, la somme de profits nets de la période est la somme des plus-values.

III - LA DETERMINATION DE LA PYRAMIDE DES AGES DU CAPITAL FIXE.

La détermination de r présuppose la connaissance de la pyramide des âges du capital fixe dans chaque branche. Or cette pyramide dépend du schéma d'accumulation, et, par là, peut dépendre de r. N'y-a-t-il pas un cercle vicieux ?

En fait, la pyramide dépend du taux de croissance du schéma d'accumulation. Certes, celui-ci peut être présenté comme dépendant explicitement du taux de profit, par exemple dans un schéma "où les capitalistes accumulent une fraction β de leurs profits", et c'est alors que la question se pose. Mais il faut en mesurer l'exacte portée. Comme nous l'avons déjà expliqué (voir notes (1) et (2)), le schéma d'accumulation en vigueur est la résultante de multiples déterminations au sein de la lutte des classes, et d'ailleurs l'accumulation ne se réalise jamais "à normes constantes", mais toujours de façon partiellement intensive, c'est-à-dire avec transformation des opérations productives. Il est donc hors de question de rechercher une détermination endogène du schéma d'accumulation, de la pyramide des âges, du taux de profit, etc..., à partir de la donnée arbitrairement exogène du taux d'accumulation β (par exemple). Autrement dit, nous n'avons pas à nous poser de problème d'unicité des solutions des équations posées. En revanche, nous devons nous poser la question de la non-contradiction des modèles mathématiques présentés, qui figent des moments successifs de la réflexion économique. Ici, il ne faudrait pas que, compte tenu du taux d'accumulation β, le taux de profit, déduit d'une structure Y de la production sociale et α de la pyramide des âges du capital fixe,

./.

implique un taux de croissance qui à son tour implique des structures Y et α différentes ! Ce qui est donc posé, du point de vue mathématique, c'est le problème de l'existence de solutions satisfaisant à la fois aux équations du taux de profit et à celles des schémas d'accumulation.

Nous allons commencer par calculer la pyramide des âges du capital fixe en fonction du taux de croissance, puis examiner les deux cas extrême (reproduction simple, accumulation intégrale), enfin le cas général.

a) Calcul de la pyramide des âges.

Soit g le taux de progression du produit brut Y. Il faut que le capital circulant et le capital fixe en volume s'élargissent à ce taux. Or le volume de capital fixe de type k s'élargit de la différence entre les investissements, et les déclassements d'équipements d'âge T_k. On calcule (c'est une propriété classique des progressions géométriques) qu'il suffit alors, pour que le stock croisse au taux g, que les investissements nouveaux croissent au taux g. Il en résulte que chaque génération est 1+g fois plus importante que la précédente. Posons $\delta = 1+g$. Pour un bien de durée de vie T : $\alpha_t = \delta\ \alpha_{t+1} = \delta^{T-1-t}\ \alpha_{T-1}$

Or : $1 = \sum_{0}^{T-1} \alpha_t = \alpha_{T-1} \sum_{0}^{T-1} \delta^{T-1-t} = \alpha_{T-1} \dfrac{1-\delta^T}{1-\delta}$

D'où : (V) $\boxed{\alpha_t = \delta^{T-t-1} \dfrac{1-\delta}{1-\delta^T}}$

Nous connaissons donc la pyramide des âges en fonction du taux de croissance d'une économie qui se dilate.

b) Cas de la reproduction simple et de l'accumulation intégrale.

En reproduction simple : $g = o$, $\delta = 1$, $\alpha_t = \frac{1}{T}$.

α_t étant explicitement indépendant du taux de profit, le raisonnement de détermination du taux de profit présenté dans la partie II s'applique sans problème.

En accumulation intégrale, chaque branche ne produit que les conditions de la production de la période suivante. Or ces conditions de production dépendent, on va le voir, du taux de profit et de la pyramide des âges du capital fixe.

./.

Pour les branches produisant le capital fixe, qui ont dû produire la période précédente $\sum_j \alpha^k_{j,o}\ b^k_j\ y^j$, elles doivent produire cette fois :

$$(VI_k) \qquad y^k = \delta \sum_j \alpha^k_{j,o}\ b^k_j\ y^j$$

Pour les branches produisant le capital constant circulant, qui ont dû produire dans la période précédente : $\sum_j a^c_j\ y^j$, elles doivent maintenant produire :

$$(VI_c) \qquad y^c = \delta \sum_j a^c_j\ y^j$$

Et de même, si d est le vecteur de consommation ouvrière, les branches productrices de biens de consommation ouvrière doivent produire :

$$(VI_v) \qquad y^v = \delta \sum_j d^v\ l_j\ y^j$$

Le vecteur de la production sociale et le taux de croissance sont donc solutions y^*et δ^* de l'équation :

$$(VI) \qquad y = \delta\ (A + d\boxtimes\ell + \alpha_o B)\ y$$

La matrice "sociotechnique" $M = A + d\boxtimes\ell + \alpha_o B$ a, comme y^*, tous ses coefficients positifs ou nuls (9). D'après le théorème de Frobenius, y^*est vecteur propre correspondant à l'inverse de la dominante (non-nulle) de M:$\frac{1}{\delta^*}$. De plus, y^*et δ^*sont des fonctions continues et, en ce qui concerne δ^*, décroissante, des coefficients α_o (qui forment un m-uple $\hat{\alpha}$) et de ceux de d. Or $\hat{\alpha}$ dépend lui-même continûment de δ, et d dépend du système de prix, donc du taux de profit. Voyons cela.

D'abord, d'après (V), $\hat{\alpha}$ est une fonction croissante de δ pour $\delta \geq 1$: chaque $\alpha_{k,o}$ croît de $\frac{1}{T_k}$ à 1. Quant aux coefficients de d, ils sont au moins nuls. La matrice M est donc minorée par $M' = A + \frac{1}{T} B$ et l'inverse δ de sa valeur propre dominante est majorée par l'inverse de la dominante μ (M'). Donc, dans l'intervalle compact convexe $[1, \frac{1}{\mu(M')}]$, δ définit continûment par (V) la valeur de tous les coefficients α, et réciproquement, pour d donné, α définit continûment par (VI) une valeur δ^* dans le même intervalle.

./.

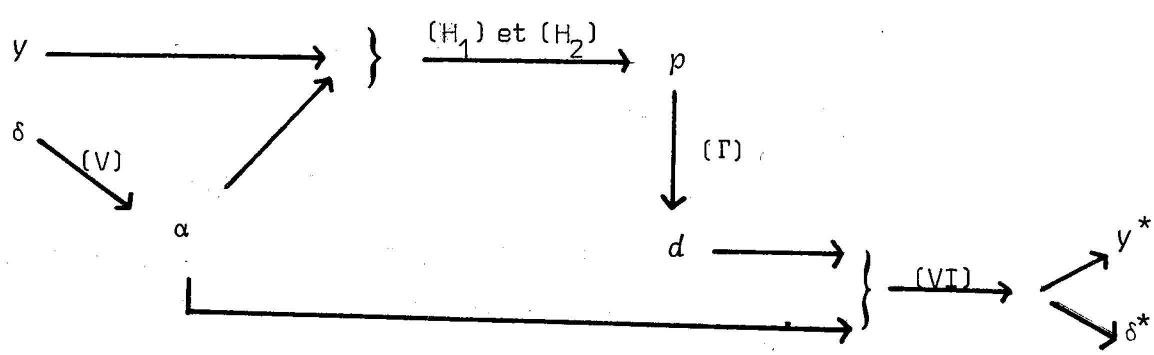
Voyons ce qu'il en est de d. Dès l'instant que nous décrivons par branches les contraintes de la reproduction, nous devons préciser en effet quelle est, en valeurs d'usage, la structure de la consommation ouvrière, c'est-à-dire sur quel "panier" d se porte le salaire. Nous ne sommes plus en effet dans le cadre de la solution Seton-Morishima, où ce panier était donné a priori. Ici, pour une valeur w donnée de la force de travail, la structure de la consommation ouvrière d dépendra de la structure des prix p, et de bien d'autres facteurs. En fait, comme nous l'avons expliqué dans la note 7902, w et d se codéterminent mutuellement au sein du jeu très complexe de la lutte de classes etc... Cependant, si nous avons déjà explicité une "fonction de besoin" comme celles proposées par G. Duménil ou J. Roemer, un petit problème de "cercle vicieux" se posera, tout à fait analogue au problème plus large que nous traitons dans cette partie : c'est-à-dire un problème de non-contradiction, d'existence d'une solution, et non pas un problème de détermination univoque, d'unicité de la solution (10).

Admettons donc la contrainte d'une fonction de besoin Γ, qui, à une valeur w de la force de travail, et à un système de prix de production, fait correspondre <u>continûment</u> un vecteur d des consommations ouvrières.

Mais ce système des prix de production est calculé, dans la nouvelle solution au problème de la transformation, à partir de y et des α, et il est facile de voir qu'il en dépend continûment.

Considérons donc le compact convexe des y possibles à partir de la quantité donnée de travail abstrait disponible dans la période : $y.\ell$ = Constante.
Il existe toujours un y^* solution de (VI) appartenant à ce domaine.

Adjoingnons lui l'intervalle de variation de δ préalablement défini. A tout couple (y,δ) défini sur ce produit cartésien de compacts-convexes correspond un autre couple (y^*,δ^*) du même domaine, défini par l'enchaînement d'applications continues ici résumé :



D'après le théorème de Brouwer, cette correspondance admet un point fixe (11).

Donc *il existe au moins une structure d'accumulation intégrale, définie par la structure de la production sociale, de la consommation ouvrière, de la pyramide des âges du capital fixe, et un taux de croissance G, respectant l'ensemble des contraintes du modèle.*

c) Cas général.

Ce ne sera pas un cas si général que ça ; on supposera seulement que tous les capitalistes accumulent dans leur branche une fraction β de leur profit, et consomment le reste selon une structure constante c^*. Le taux de croissance g dépendra évidemment de β.

Dans ce cas la pyramide des âges dépend explicitement du taux de profit, via la dépendance de g (donc de δ). Cependant, quel que soit β entre 0 et 1, nous savons que g reste compris dans le compact convexe [0,G].

Partons donc cette fois du couple (Y,g) défini dans un compact convexe. A g correspond continûment par (V) une pyramide des âges du capital fixe $\tilde{\alpha}$. A Y et $\tilde{\alpha}$ correspond continûment par (H_1) et (H_2) un système des prix p et un taux de profit r, d'où une masse des profits qui, répartie selon la structure c^*, donne une consommation improductive C (13). La consommation ouvrière d se déduit continûment à partir de w, p et (Γ). A son tour, le système des prix et des profits va déterminer le taux de croissance. Le reflux du capital circulant, des amortissements, et l'accumulation d'une fraction β du profit net servent en effet dans chaque branche à acheter du capital circulant et une nouvelle génération de capital fixe, permettant d'élargir la production au taux g^*. Il est intuitif (et on vérifie (14)) que $g^* = \beta r$, fonction continue.

Soit Y' le vecteur de ces consommations productives des branches (qui comprend indirectement la consommation des producteurs, y compris celle des nouveaux embauchés). Par un raisonnement analogue à celui du cas de l'accumulation intégrale, on a :

$$Y' = (1+g^*)\ (A + d \otimes \ell + \alpha_0 B)\ Y$$

La production totale est donc :

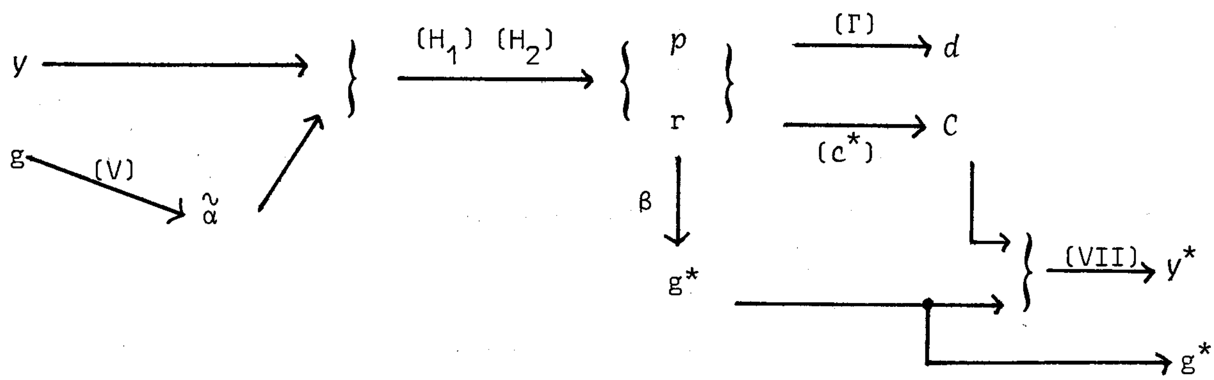
$$Y = Y' + C = (1+g^*)\ (A + d \otimes \ell + \alpha_0 B)\ Y + C \qquad \text{(VII)}$$

Soit Y^* la solution de l'équation linéaire (VII). Par construction, le profit contenu dans le prix de Y^* est égal au profit contenu dans le prix de Y. Or celui-

./.

ci est égal à la plus-value contenue dans la valeur de Y. La valeur ajoutée dans Y^* est donc également la valeur ajoutée dans Y. Donc Y^* appartient au domaine compact convexe $Y.\ell$ = constante. De plus il dépend continûment de g^*, d, $\tilde{\alpha}$, C.

Nous avons donc une application continue du domaine compact-convexe des (Y,g) sur lui-même, que l'on peut résumer par le schéma suivant :



Cette application admet donc (théorème de Brouwer) un point fixe.

Nous pouvons donc conclure :

<u>Théorème</u>. Pour tout schéma d'accumulation défini par :

- *des opérations productives représentatives comprenant du capital fixe,*
- *un taux d'accumulation* β
- *une fonction des consommations improductives (les variables étant la masse des profits et le système des prix)*
- *une fonction des consommations ouvrières (les variables étant le système des prix et le salaire)*
- *la donnée du taux d'exploitation e ou de la valeur w de la force de travail, et de la quantité de travail vivant disponible,*

il existe une structure Y de la production sociale, une pyramide des âges du capital fixe, un système de prix relatifs et un taux de profit unique, respectant ce schéma. Dans un numéraire où la somme des prix du produit net est égal à sa valeur, la somme des profits y est la somme des plus-values.

./.

IV - SUR LA RENTE.

Nous ne traiterons pas ici des rentes différentielles dérivant de données "exogènes" à l'activité de l'entrepreneur (différences de fertilité naturelle ou de localisation) ou "endogènes" à cette activité (variations dans le "rendement de la terre" dues au caractère plus ou moins capitalistique du procès de travail mis en oeuvre). Nous avons déjà longuement traité de ces problèmes dans un ouvrage antérieur (15).

Nous cherchons simplement à étendre le théorème marxiste de la transformation au cas de la rente absolue (celle qui découle de la seule propriété juridique de la terre), afin de montrer qu'elle n'est, comme le profit, qu'une simple redistribution de la plus-value.

Pour simplifier, nous considérerons qu'il n'existe qu'une opération productive par branche (donc pas de rente différentielle endogène), sans capital fixe, que les branches j requièrent l'occupation d'une quantité t_j de terre pendant la période de production, la terre restant la propriété du propriétaire foncier, qui exige une rente R par unité de surface et de temps (donc le "tribut foncier" a toujours la forme d'une rente), et qu'enfin la qualité de la terre est homogène (donc pas de rente différentielle exogène). Enfin nous admettons que la rente est payée en fin de période, ce qui fait de $R\,t_j$, non un élément du coût de production, mais un élément de la répartition (16). Dans ces conditions, le propriétaire foncier évalue le prix de sa terre en la comparant à ce que lui rapporterait un capital engagé selon les taux de profit moyen (s'il existe : et on va l'examiner).

$$p_t = \frac{R}{r} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Soit donc à trouver un système de prix de production dans le numéraire habituel :

$$H_1) \quad p.y = v.y$$

$$H_2) \quad p = \gamma\,(p\,A + w\ell) + R\,t$$

./.

$H_2)$ s'écrit : $$p = [\gamma\, w\ell + (\gamma-1)\, p_t t]\, [\frac{I}{\gamma} - A]^{-1}$$

Considérons p_t comme un paramètre. La fonction p est strictement croissante en γ pour $\gamma>1$, et, pour $\gamma=1$ et $p_t=o$, la valeur de $p.y$ qu'elle définit est inférieure à $v.y$. Donc, selon la valeur du paramètre p_t, il y aura, ou il n'y aura pas, de solution satisfaisant $H_1)$, et quand il y en aura, il n'y en aura qu'une. On voit que le prix de la terre discriminant p_t^* est fonction de y, ce qui est économiquement évident : le niveau p_t du prix du sol dépend de la force des propriétaires fonciers (donnée exogène), mais ne saurait excéder certaines limites (que nous allons fixer), qui dépendent de l'importance de l'occupation de terre dans la production sociale, donc de la pondération de cette production selon des branches qui occupent plus ou moins de terre.

Examinons ces "limites", qui renvoient à l'origine de la rente : la plus-value sociale. La somme des profits et des rentes est égale à la différence entre le prix du produit net et les salaires versés (17) :

$$\text{Profits + Rentes} = p.y - w\, \ell.y$$

soit, dans le numéraire adopté :

$$\begin{aligned}\text{Profits + Rentes} &= v.y - w\, \ell.y \\ &= \ell.y - w\, \ell.y \\ &= \text{somme des plus values}\end{aligned}$$

On retrouve le théorème marxiste fondamental : Dans le numéraire où le prix du produit net est égal à sa valeur, la somme des profits et des rentes est égal à la plus-value.

Il en résulte que, le rapport de force de la propriété foncière étant une donnée exogène, mais le profit ne pouvant être nul ou négatif, la rente totale du sol occupé ne doit pas être supérieure, dans ce numéraire, à la plus-value qu'on y produit.

./.

CONCLUSION

La nouvelle solution au problème de la transformation, dont nous avions montré qu'elle était la plus conforme à l'esprit et même à la lettre du problème qu'avait lègué K. Marx, nous est apparue d'une extrême souplesse et maniabilité. Tous les résultats intuitifs, dont K. Marx avait fait des affirmations, se trouvent facilement vérifiés. Cela résulte de sa théorie de la valeur et de l'exploitation :

- si la valeur du produit net d'une période représente le travail abstrait cristallisé dans la période.
- si l'exploitation consiste en ce que les travailleurs ne se voient reverser qu'une fraction, en argent, de la valeur qu'ils ont produite,
- si la péréquation capitaliste des profits et d'autres rapports sociaux secondaires tels que la rente ne font que modifier l'allocation de la valeur sociale produite sur les différentes marchandises,
- alors la somme des revenus des classes non productrices ne saurait être que la plus value prélevée dans la période.

A. LIPIETZ
Septembre 1979

NOTES

1) A. LIPIETZ, Retour au problème de la transformation, CEPREMAP 7902 (version anglaise : 7902 bis).

2) Voir A. LIPIETZ, Crise et inflation : pourquoi ?, Maspéro 1979. Soient t_j et t_c les temps de rotation du capital fixe et du capital circulant, u, d, v les flux d'amortissement, de capital constant-circulant et de capital variable dépensés dans la période, t la moyenne pondérée de ces temps de rotation, q la composition organique $\frac{u+d}{v}$, e le taux d'exploitation $\frac{pl}{v}$. On vérifie facilement l'égalité ci-dessous.

3) On admet qu'il n'y a pas de difficulté à adopter un temps discontinu commun à tous les procès productifs. Notons qu'il peut arriver que certaines dépenses soient échelonnées selon une périodicité inférieure au cycle du capital circulant : par exemple le salaire des ouvriers dans un chantier naval, ou même dans le bâtiment.

4) On rejoint ici la conception du capital fixe usagé comme "production jointe" chez P. Sraffa, Production des marchandises par des marchandises, Dunod, 1970.

5) Les formules d'amortissement dégressif intégrent l'obsolescence accélérée des équipements. Elles constituent un encouragement à l'investissement.

6) C'est intuitivement évident, si l'on veut bien interpréter le prix d'un capital comme l'actualisation, au taux r, du profit qu'il permettra de s'approprier. Plus le taux r est fort, plus l'horizon économique se rapproche, moins compte les profits qu'une machine neuve permettra de s'approprier en une période lointaine où telle machine déjà usée aujourd'hui aura cessé de fonctionner.

Ainsi, un bâtiment qui s'use en 50 ans aura perdu au bout de 25 ans la moitié de son prix si le taux de profit est nul, et sa dépréciation sera négligeable si le taux est de 20 %. Si le taux est de 10 %, il vaudra encore à cette date plus de 90 % de son prix neuf.

7) Soient n le nombre de branches produisant des biens "circulants" et m le nombre de branches produisant des biens "fixes". Les matrices barrées ont $n+\sum_{1}^{m} T_k$ lignes et m+n colonnes.

./.

8) Comme on le vérifie par l'équation (III) de définition du produit net (d'ailleurs conçue exprès pour cela) : $\bar{v}.\bar{y} = \bar{v}.\bar{Y} - v\,\overline{A}\,\bar{Y} - \bar{v}\,(\overline{\alpha B} - \overline{\alpha B^{+}})\,\bar{Y}$
ce qui se lit :

valeur du produit net = valeur du produit de la période - valeur du capital constant circulant - perte de valeur du capital fixe.
= valeur ajoutée par le travail vivant dans la période

On calcule de même que $\bar{p}.\bar{y}$ est la somme des salaires et des profits (nets des amortissements) de la période.

9) $d \otimes \ell$ est produit tensoriel (ou de Kronecker) : c'est la matrice de coefficients $d^i\, l_j$. Quant à $\alpha_o B$ (comme plus loin $\frac{1}{T}$ B), on l'obtient à partir de la matrice B en multipliant tous les b^k_j par $\alpha^k_{j,o}$, c'est-à-dire en fait par α^k_o, la pyramide des âges du même bien capital fixe étant ici la même dans toutes les branches (équation (V)).

On supposera bien sûr que M est indécomposable. Dans le cas contraire, l'équation (VI) définit une multifonction, et il faut remplacer le théorème de Brouwer par celui de Kakutani dans la suite du raisonnement.

10) Chez G. Duménil, on pose une structure d^* de consommation de valeur unitaire, et le vecteur d effectivement consommé est un multiple de celui-ci qui épuise le pouvoir d'achat. Chez J. Roemer, Γ est une famille de fonctions de préférence admettant les propriétés marginalistes classiques. Dans les articles de ces auteurs cités en 7902, la contrainte budgétaire est définie en valeurs incorporées aux marchandises, mais il est tout à fait possible de transposer à la nouvelle solution, où la contrainte budgétaire est définie en "valeurs péréquées". Mais dans ce cas, le vecteur d varie avec le système de prix.

11) Il serait intéressant, quoiqu'académique, d'étudier combien elle en admet.

12) $\tilde{\alpha}$ et r étant donnés, (II*) donne le système des prix relatifs.

13) On voit qu'en fait la seule chose qui nous importe est que la consommation improductive des capitalistes dépend continûment de la masse des profits et du système des prix.

14) Le capital réengagé dans chaque branche est la somme :
- du capital circulant et des amortissements de la période
- d'une fraction β du profit net, lui-même égal à r fois le prix du capital circulant et du capital fixe net. Ce capital réengagé permet, dans chaque branche, d'acheter (1+g*) fois le capital circulant de la période et de porter le stock de capital fixe à (1+g*) fois celui de la période.

Compte-tenu de nos remarques antérieures, cela peut s'écrire vectoriellement :

$$\bar{p}\ [(1+\beta r)\ \overline{\alpha B_{-}} - \overline{\alpha B^{+}}] + (1+\beta r)\ \overline{PKC} = (1+g^{*})\ \bar{p}\ \overline{\alpha_{o}B} + (1+g^{*})\ \overline{PKC}$$

Notons $1+\beta r = \eta$ et $1+g^{*} = \delta^{*}$

Par un calcul semblable à celui qui permet le passage de (II^{*}) à (II^{**}), cette équation s'écrit :

$$p\ \omega(\eta)\ B + \eta\ PKC = p\ \alpha_{o}B + \delta\ PKC$$

Or :

$$\omega(\eta) = \eta^{T}\ \frac{1-\eta}{1-\eta^{T}}\ ,\ \text{et}\ \delta\ \alpha_{o} = \delta^{T}\ \frac{1-\delta}{1-\delta^{T}}$$

On a donc bien $\eta = \delta$ ou $g^{*} = \beta r$

Remarquons qu'est vérifié aussi ce que nous avions implicitement admis pour ne pas alourdir le raisonnement et les notations : que si le taux de profit est uniforme, et la fraction accumulée aussi, toutes les branches se développent selon le même taux de croissance. En fait c'est la signification de fond de l'égalisation des taux de profit : la validation sociale d'une identique capacité de croissance de toutes les branches (voir Crise et inflation : pourquoi ?, tome II).

15) A. LIPIETZ, Le Tribut foncier urbain, F. Maspéro, Paris, 1974, en particulier l'annexe mathématique.

16) Ce qui est la position de P. Sraffa dans ses modèles algébriques, mais le contraire de sa position dans le texte littéraire du chapitre XI de sa Production des marchandises par des marchandises. Voir A. LIPIETZ, "Terre, rente et rareté - Commentaire sur les incohérences d'un texte de P. Sraffa", Revue d'Economie Politique, n°5-1978, Sirey, Paris, et A. LIPIETZ "Les mystères de la rente absolue", Cahiers d'Economie Politique, n°5-1979, P.U.F. Amiens.

17) Comme on le vérifie aisément par la condition H_2 :

$$p.y = \gamma\ (pA + w\ell)\ y + R\ t.y$$

d'où :

$$\underbrace{r\ (pA + w\ell)\ y}_{\text{Profit}} + \underbrace{R\ t.y}_{\text{rente}} = \underbrace{p[I - A]\ y}_{\text{prix du produit net}} - \underbrace{w\ell.y}_{\text{masse salariale.}}$$

De plus, nous savons (voir la note 7902) que :

$$v.y = \ell.y$$