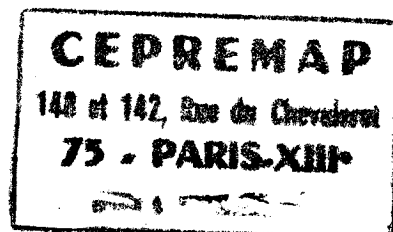


CEPREMAP



N° 7902

RETOUR AU PROBLEME DE LA
"TRANSFORMATION DES VALEURS EN
PRIX DE PRODUCTION"

Par
A. LIPIETZ

RETOUR AU PROBLEME DE LA "TRANSFORMATION DES VALEURS EN PRIX DE PRODUCTION"

Beaucoup d'encre a coulé depuis les premières critiques de Von Bortkiewicz contre la "transformation des valeurs en prix de production" telle que la réalise K. Marx dans le Livre III du *Capital* [11]. Si l'on n'en est plus à prétendre que la découverte de cette "erreur" ouvre la "crise du marxisme" (une question aussi technique ne saurait mériter ni cet excès d'honneur, ni cette indignité (1)), il reste que la solution à présent communément admise au problème (solution qui atteint sa maturité avec l'oeuvre de M. Morishima(2)) implique un grave affaiblissement de la portée de la théorie marxiste de la valeur et de la plus-value, ramenée tout au plus à une formulation assez fruste et approximative de l'idée que les travailleurs ne reçoivent pas en salaire tout le fruit de leur travail. Telle est du moins la position à laquelle s'arrêtent tant M. Morishima lui-même, avec son "théorème marxien fondamental" (le taux de profit est positif si et seulement si le taux de plus-value est positif) que P.A. Samuelson (3) pour qui "ce qui est vital chez Marx", indépendamment de la "digression du Livre I sur la plus-value", est la comparaison entre la quantité de bien de subsistance nécessaire à la reproduction du travail et le volume de biens produisible pour l'ensemble des classes. Mais cela, "les outils de l'économie bourgeoise aurait pu le découvrir" : c'est-à-dire la théorie pour laquelle le temps pendant lequel le possesseur d'argent accepte de différer sa consommation, étant un bien aussi rare que le travail, mérite lui aussi un revenu spécial (l'intérêt).

./.

[1] Déjà en, en 1899 (!), Antonio Labriola devait répondre à ce type de critique ("A propos de la crise du marxisme," [9].)

[2] Voir en particulier son *Marx's economics* [12]. Je ne cherche nullement à oblitérer la mémoire des travaux de Medio, Meek, Okishio, Seton, Sweezy, Roubine Winternitz, etc... (pour un "survey", voir [3] et [15]). Il s'agit simplement de fixer un point de repère assez largement connu.

[3] Voir [15], p.421.

Face à une telle situation, de nombreux auteurs marxistes se réfugient dans un refus embarrassé de la formalisation du type M. Morishima, s'appuyant sur des critiques en soi pertinentes mais sans grand rapport avec le sujet (4), ou alors refusent, au nom de critères épistémologiques peu tenables, d'affronter le problème même de la transformation (5).

Mon propos est ici de montrer que non seulement la solution du type Morishima, réévaluée et complétée, ne contredit aucunement les objectifs de Marx dans *Le Capital*, mais encore qu'il existe une autre solution, serrant au plus près la démarche du *Capital*, et exhibant les fameux résultats du Livre III démentis par la solution de Morishima : "Somme des prix = somme des valeurs", "somme des profits = somme des plus-values", et cela quelle que soit la structure de la production, c'est-à-dire la pondération des différentes branches, le taux de profit se déduisant du taux d'exploitation selon cette structure de la production (et non selon la structure de la consommation des travailleurs, comme chez M. Morishima). La première partie sera consacrée à l'état de la question telle que Marx l'avait laissée, la seconde à l'approfondissement et à la critique de la solution de type Morishima, la troisième à la présentation de la nouvelle solution, et la quatrième à la comparaison de ces deux solutions.

(4) Je pense en particulier à Salama [14] et Yaffé [16].

(5) Je pense ici à C. Benetti et J. Cartelier [3].

I - LA SOLUTION DE MARX ET SA LIMITE.

Pour Marx (6), le caractère marchand de l'économie confère aux produits des unités économiques une *valeur*, proportionnelle à la part du travail social affecté à leur production et validé (dans l'échange) par cette société. Pour adopter une formalisation moderne, on peut dire qu'à chaque lot de marchandises, représenté par un vecteur y dans un espace ayant pour base naturelle les n différentes unités de valeur d'usage, la valeur, forme linéaire v sur cet espace, fait correspondre un nombre positif (7).

Dans une opération productive supposée représentative, le travail "vivant" appliqué aux moyens de production ajoute de la valeur à la valeur déjà incorporée par un travail passé dans les moyens de production (8). De sorte que, si a_j^i est la quantité de bien i que nécessite normalement la production de l'unité de bien j , et si A est la matrice correspondante, on a : $v = v A + \ell$, avec $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_j]$ la quantité de valeur incorporée par le travail abstrait concrétisé dans la branche j , d'où il résulte :

$$v = \ell (I - A)^{-1}$$

Remarquons que cette manière "d'ajouter" du travail présent à la valeur passée (9) (alors que la substance et la mesure de la valeur définies plus haut renvoient à des flux de marchandises produits *simultanément* par la société) soulève quelques réserves, allant jusqu'au refus de certains marxistes français (10). On peut montrer cependant qu'elle est légitime, et inhérente à la forme de la

./.

(6) Le résumé extrêmement succinct qui va suivre soulève une foule de problèmes conceptuels, longuement analysés (texte de Marx à l'appui) dans mon livre [10]. Il s'agit seulement ici d'examiner les conditions du passage au formalisme algébrique de la "transformation".

(7) Les vecteurs y (et les formes linéaires ou covecteurs v) sont représentés par des lettres en italiques, ou de vecteurs-colonnes à droite (respectivement : des vecteurs-lignes à gauche).

(8) Par "opération productive représentative", on entend l'opération de productivité normale, résumée par la donnée d'une technique où sont énumérés les moyens de production requis et le temps de travail nécessaire à leur opération. Voir Aglietta [1] et Lipietz [10].

(9) Remarquons bien que v et ℓ sont de même "substance" : du "travail abstrait" (ce sont des covecteurs). v une fois calculée, on peut "renormaliser" la matrice A en choisissant pour unité de chaque valeur d'usage la quantité de valeur unité. Les coefficients a_j^i sont alors des scalaires purs (et non des unités de i par unité de j).

(10) Je pense à C. Benetti, J. Cartelier et J. Fradin. Voir par exemple C. Benetti, "La genèse de la théorie de la reproduction-circulation de la valeur", [4], § 24.

valeur, pour peu que les normes de production soient supposées stables, et que l'on étudie l'économie dans sa *reproduction*, car alors la "valeur du travail passé" consommé dans une branche correspond à la valeur d'un travail présent, effectué dans une autre branche. Naturellement, il n'en est plus de même si l'on admet une évolution dans l'organisation des forces productives : et c'est une des causes de la crise et de l'inflation (11). Quoi qu'il en soit, le débat sur la "transformation" implique justement (quoique rarement explicitement) ces hypothèses.

Jusqu'ici, nous n'avons encore rien dit du caractère capitaliste de notre économie. La démarche marxiste, comme toute démarche conceptuelle, procède par position successive des déterminants abstraits de la réalité concrète (12) : on étudie d'abord la chute des corps dans le vide, puis on introduit la résistance de l'air, ou/et un champ magnétique, etc... Dans la première section du livre I, Marx pose et étudie la loi de la valeur (substance, forme, grandeur de la valeur), "en général", c'est-à-dire dans toute économie marchande. Puis il étudie les "découpages" dans la mesure de la valeur qu'introduit la prise en compte du rapport capitaliste, puis il introduira (au livre III) les modifications dans les formes même de la loi de la valeur qu'induit ce rapport.

Dans le capitalisme, la force de travail apparaît (au capitaliste, pas à l'ouvrier, bien sûr) comme une marchandise. Cette marchandise a pour lui une valeur w : le nombre d'heures de travail abstrait que les travailleurs ont obtenu le "droit" (à la suite de tout un processus historique) de dépenser sur le marché pour reproduire quotidiennement leur force de travail. Elle a également une valeur d'usage : produire du travail abstrait, donc ajouter de la valeur. La encore, la quantité de travail abstrait v_a "extraite" de cette marchandise, déterminée par l'intensité ϵ et la durée λ du travail, sont le produit d'une intense "guerre de classe" (13). Ces trois variables (valeur, durée, intensité du travail) déterminent conjointement le *taux de plus value* e , ou taux d'exploitation, rapport entre la quantité de travail abstrait extorquée en sus de la valeur reconnue comme nécessaire à la reproduction du travailleur (la plus-value $pl = v_a - w$) et la valeur w de la force de travail elle-même. On a : $w (1+e) = 1$.

./.

[11] Voir Lipietz [10].

[12] Voir Duménil [5].

[13] Voir Marx [11], livre I, chapitre X.

Pour reprendre la formalisation vectorielle, on a maintenant :

$$v = v A + w \ell + e w \ell$$

C'est la forme moderne du : "C+V+PL". Remarquons qu'en adoptant cette notation nous avons supposé que la quantité de marchandise force de travail qu'il faut nécessairement acheter et mettre au travail pour produire le bien j se mesurait par le même nombre que la quantité de travail abstrait produite par cette force. C'est-à-dire que nous avons supposé données la durée et l'intensité du travail, et que nous avons pris pour unité de force de travail le jour (par exemple), et pour unité de valeur le travail abstrait produit en un jour. Et que, bien sûr, toutes les normes de production étant socialement fixées, le travail concret est directement compté comme travail social abstrait. Autrement dit, nous avons sous-entendu l'existence d'un tenseur T (dont les coefficients sont déterminés dans chaque base par l'intensité ϵ et la durée λ normales du travail) transformant les n -uples de marchandise "force de travail" en covecteurs "valeurs ajoutée" (14). Ce sont là des petites choses bien triviales, mais leur "oubli" aboutit à identifier, comme chez les économistes classiques pré-marxistes (Smith, Ricardo), "travail commandé" et "travail incorporé" (15), et, chose bien plus grave pour notre discussion, une relation *sociale* à une relation *technique* entre des "quantités d'input".

L'illusion d'une pure relation technique entre input et output est achevée lorsque l'on suppose, ce qui est légitime, que, de même que la production d'un bien j est caractérisée par la donnée des coefficients de l'opération productive représentative (a_j^i, l_j) , de même il existe un vecteur de consommation "normale" par unité de temps de travail : d . On a alors :

$$w = v.d$$

et l'existence de la marchandise autonome "force de travail" en quantité l_j nécessaire à la production de j se résorbe dans la donnée du panier de marchandises nécessaire indirectement à la production de j : le vecteur $[d^i l_j]$, qui (14) Soit m le n -uplé $[m_j]$, m_j étant la quantité de main d'oeuvre qu'il faut acheter pour produire l'unité de j . On voit que ces n -uples sont des formes linéaires sur les y . Un tenseur une fois covariant et une fois contravariant le transforme en covecteur ℓ . La différence entre m et ℓ est qualitative (d'une mesure y en quantité de main d'oeuvre utilisée, l'autre en travail vivant incorporé) et peut-être quantitative (si on mesure les m_j en jours ouvrés et les l_j en heures travaillées, par exemple).

(15) L'essentiel des critiques de C. Benetti et J. Cartelier [3] à la solution du type Morishima tourne autour de cette idée. Cependant, au lieu de poser l'existence de ce tenseur, les auteurs refusent tout simplement d'affronter le rapport entre l'espace des valeurs et l'espace des "prix-quantité". Il est pourtant légitime, les choses étant bien posées, d'utiliser le travail commandé (ici : $w m$) comme "indice" du travail abstrait incorporé (ℓ). C'est ce que fait Marx tout au long du livre III (voir la note 40).

s'ajoute au vecteur $[a_j^i]$. On obtient ainsi une matrice "socio-technique"

$$M = A + d \otimes \ell \quad (= A + d \otimes (\ell T^{-1})) (*)$$

matrice apparemment "technique", mais dans laquelle les trois éléments déterminants de la théorie de la valeur et de l'exploitation se trouvent déjà incorporés : par la mesure de d (valeur de la force de travail), par T , le tenseur implicite réglant la correspondance entre la quantité de main d'oeuvre utilisée et la valeur ajoutée (durée et intensité du travail).

Mais la transformation de la loi de la valeur ne fait que commencer. Si la valeur des produits règle, à travers les mécanismes de la concurrence, les rapports d'échange entre les produits d'une pure économie d'échange, qui règlera l'échange des produits entre des unités économiques qui sont des capitaux, dans une économie où les "marchandises sont des produits du capital" (16)

c'est-à-dire du travail engagé par le capital, et non du "travail tout court" ? Une forme transformée de la valeur, où la quantité de plus-value (appelée alors profit) récupérée par chaque capitaliste sera proportionnelle au capital engagé. La valeur produite dans une période par la société "fonctionnant comme une force unique" se trouve donc réaffectée (toujours par la concurrence, mais par la concurrence entre capitaux (17)) sur les produits, la valeur "péréquée" ou prix de production étant fixée de telle sorte que la plus-value (c'est-à-dire la part de la valeur créée qui ne revient pas aux producteurs) soit répartie entre capitalistes au prorata de ce qu'ils ont engagé. De sorte que la somme des prix des produits reste égale à la somme des valeurs (ou du moins proportionnelle à cette somme selon un rapport α , inverse de la valeur représentée par le numéraire) et la somme des profits reste égale à la somme de la plus-value (ou du moins proportionnelle, selon le même rapport α).

Est-ce mathématiquement possible ? Oui, pense Marx, puisque ce n'est que la traduction de sa théorie de la valeur et de l'exploitation. Et de fournir dans le livre III (dont il n'a laissé à sa mort qu'une ébauche) un petit modèle.

(16) Voir [11], tome VI, p.191.

(17) Ibidem, p.196.

(*) Le signe $\otimes$ désigne le produit tensoriel ($d \otimes \ell$ est une fois covariant et une fois contravariant). Concrètement, le résultat est le produit de Kronecker du calcul matriciel.

Soit une partition de l'économie en branches produisant chacune une valeur :

$M_i = C_i + V_i + PL_i$ (M_i représente, dans les notations algébriques modernes, la quantité de valeur $v_i y^i$, y^i étant la quantité de bien produite dans la branche i). Pour chaque branche le capital engagé a une valeur $C_i + V_i$. Le capital total engagé est $\sum_i (C_i + V_i)$. La plus-value totale est $\sum_i PL_i$. Le taux de profit

général est $\frac{\sum_i PL_i}{\sum_i (C_i + V_i)} = r$. Si chaque branche doit réaliser le même taux de profit,

alors il suffit de "péréquuer" la seule plus-value, et on a, en prix de production :

$$PP_i = (C_i + V_i) (1+r)$$

Evidemment, somme des prix = somme des valeurs, somme des profits = somme des plus-value. D'autre part le taux de profit moyen dépend :

- de e
- de la "composition organique" $\frac{C_i}{V_i}$ des différentes branches
- de la pondération du capital variable entre ces branches (c'est-à-dire, du vecteur des niveaux d'activité y).

Ce modèle souffre de deux limites. D'abord on a supposé que toutes les branches avaient la même période de production. Marx a développé de longs calculs pour évaluer l'effet de la levée de cette simplification. Ce n'est pas là-dessus que porte d'ailleurs la polémique : les théoriciens honnêtes admettent qu'il est légitime d'introduire les difficultés une par une. Nous nous en tiendrons là, nous aussi, dans cet article (18). Non, la discussion a porté sur une autre simplification, cette fois moins justifiable : les capitalistes n'achètent pas les éléments de C_i et V_i à leur valeur, mais à leur prix de production. La péréquation doit porter non seulement sur PL_i , mais sur C_i et V_i . Celà, Marx l'indique lui-même (19) mais estime que ça ne doit pas changer grand chose, et passe à des sujets qu'il estime à juste titre plus importants. Fatale erreur ! On ne pardonne pas aux grands hommes ces petites négligences... Et chose curieuse - ceux qui s'empressèrent de corriger cette négligence le firent de telle manière qu'ils effacèrent le *fond* de la démarche de Marx : prouver que le profit, loin d'être le "salaire de l'attente" des épargnants volontaires, n'était qu'une part non payée de la valeur produite par le travail ouvrier.

./.

(18) Pour introduire un capital fixe, se reporter à [12] etc... De même, je supposerai toujours les matrices indécomposables.

(19) Sur tout ceci, voir Marx [11], livre III, chapitre IX, en particulier p.177sq.

II - LA SOLUTION RECUE AU PROBLEME DE LA TRANSFORMATION.

Pour corriger la négligence de Marx, il faut poser que C_i et V_i sont achetés "à leur prix de production". Pour C_i , pas de problème : il suffit d'évaluer les intrants en prix de production. Mais que signifie "acheter V_i à son prix de production" ? Problème a priori complexe. V_i n'est, à proprement parler, qu'une masse d'argent versée aux travailleurs et qui représente une fraction (déterminée par le taux d'exploitation) de la valeur qu'ils produisent. Les "transformateurs" ont cependant trouvé un biais - qui se révélera loin d'être neutre - : assimiler la valeur de la force de travail, non à cette fraction, mais à la valeur du panier de biens d qu'elle achèterait si tous les ouvriers adoptaient le même comportement et dépensaient leur argent sur un marché dont les prix seraient réglés par le système des valeurs.

Admettons-le, pour un moment. Dès lors, V_i se transforme comme C_i , en évaluant le panier d selon les mêmes prix de production. Soit p le covecteur des prix, r le profit moyen - s'il existe.

$$p = [p A + (p.d) \ell] (1+r)$$

$$\text{soit : } \frac{1}{1+r} p = p [A + d \otimes \ell] = p M$$

p est donc vecteur propre correspondant à la valeur propre $\frac{1}{1+r}$ de la matrice socio-technique M .

Or p est semi-positif, de même que M . Le théorème de Perron-Frobenius (20) enseigne que p est nécessairement vecteur propre associé à la valeur propre dominante $\mu (M)$.

$$\text{On a donc : } r = \frac{1}{\mu (M)} - 1$$

Première remarque : μ ne dépend que de M , donc de A , ℓ et d , qui déterminent également e . Pour l'ensemble des d tels que $v.d = w$ (donc à taux de plus-value constant), r ne dépend que de la direction du vecteur d (c'est-à-dire de la structure de la consommation ouvrière). Et absolument pas de la structure y de la production totale.

./.

(20) Voir [8], tome II, chapitre XIII.

Il y a plus grave. Choisissons le numéraire de telle sorte que : somme des prix = somme des valeurs, soit $v.y = p.y$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \text{somme des profits} &= r p M y \\ \text{somme des plus-value} &= e w l.y \end{aligned}$$

Ces sommes ne sont égales que pour $(r p M - e w l). y = 0$
C'est-à-dire pour y appartenant à une variété de dimension $n-1$, alors que y appartient a priori à une variété de dimension n (21). Donc, sauf pour un ensemble de mesure nulle des structures de la production, on ne peut pas avoir :

$$\frac{\text{somme des prix}}{\text{somme des valeurs}} = \frac{\text{somme des profits}}{\text{somme des plus-value}}$$

Deux résultats devant lesquels de nombreux marxistes ont préféré se voiler la face . A tort, à mon avis. Et pas seulement parce que M. Morishima et P. Samuelson leur offrait ce lot de consolation, baptisé "théorème marxien fondamental". *Le taux de profit ne peut être positif que si et seulement si le taux de plus-value est positif* (22).

Mais parce qu'on peut tirer de ce cadre conceptuel à peu près tous les enseignements que Marx entendait tirer de son modèle.

1°) La valeur de ce qui échoie aux capitalistes est bien la plus-value.

Autrement dit : même si la somme des profits n'est pas la somme des plus-values, la valeur des emplois du profit est bien la somme des plus-values. Ce théorème se démontre très simplement. Il suffit de remarquer que lorsqu'on écrit :

$$p = (1+r) p M$$

on écrit que toute la production est réalisée : il n'y a aucune mévente.

./.

(21) Si on ne choisit pas une structure d'accumulation et de dépense particulière des profits, la seule contrainte est la pleine réalisation de la production. Or les capitalistes peuvent a priori consommer un vecteur c dans une variété de dimension n .

(22) Voir [12] et [15]. Nous présenterons plus loin un résultat beaucoup plus riche.

Or le produit brut Y de la période sert :

- à reproduire les conditions de production : $M Y$
- à la consommation improductives des capitalistes C
- à la production des éléments de l'élargissement de la production, ou accumulation : $M \Delta Y$

Ces deux derniers termes constituent l'emploi du profit (le premier constituant l'emploi du capital initial).

On a donc : $Y = MY + C + M \Delta Y$

$$v. (Y - MY) = v (C + M \Delta Y)$$

$$e w \ell Y = v (C + M \Delta Y)$$

C.Q.F.D.

De façon plus intuitive, on voit bien que si les prix auxquels les capitalistes vendent les marchandises "diffèrent" de leur valeur, il en est de même en ce qui concerne les marchandises qu'ils achètent, et que l'un compense l'autre, en un sens que nous allons maintenant expliquer.

2°) Les prix de production régulent le comportement de capitalistes "conformes à leur concept".

Dans le paragraphe précédent, la "consommation improductive" des capitalistes était indéterminée, et il ne pouvait en être autrement au niveau d'abstraction qui est le nôtre : C ne pourrait être déterminé que par des considérations psychosociologiques. Ici, le capitaliste n'est, selon le mot de Marx, que le "fonctionnaire de son propre capital", valeur qui n'a qu'un but : se mettre valeur. Si donc nous réduisons le capitaliste à son essence, il obéira à la fameuse "éthique protestante" chère à Max Weber, au "devoir d'état" de Calvin : frugal à l'extrême, il accumulera tout son capital, et dans sa propre branche car il n'a aucune raison (sauf autres déterminations) de faire autrement.

Soit donc $p_i y^i(t)$ le chiffre d'affaires de la branche i au temps t ; il est intégralement consacré à l'achat des conditions de la production de $y^i(t+1)$:

$$\begin{aligned} p_i y^i(t) &= (p M)_i y^i(t+1) \\ &= \frac{1}{1+r} p_i y^i(t+1). \end{aligned}$$

Donc : $y^i(t+1) = (1+r) y^i(t)$

Par ailleurs, ces conditions de production (qui comprennent les biens de subsistance des ouvriers réembauchés) représentent la totalité du produit de la période t :

$$y(t) = M y(t+1)$$

Donc : $y(t+1) = (1+r) M y(t+1)$

Le vecteur de la production est donc le vecteur propre $\hat{y}$ à droite de la matrice correspondant à la dominante, il croît exponentiellement au taux $1+r$: c'est le fameux sentier de croissance, que M. Morishima appelle "rayon de Marx-Von Neumann" et que j'appellerai "structure d'accumulation intégrale", qui assure la croissance équilibrée maximale (23).

Pour cette structure de la production (de mesure nulle dans l'ensemble des structures possibles, mais jouissant d'une incontestable légitimité !), il est facile de montrer que, si on choisit le covecteur des prix de production à un niveau général $\hat{p}$ tel que : $\hat{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y}$, alors on a, pour $\hat{y}$:

$$\text{somme des profits} = \text{somme des plus-values}$$

En effet :

$$\text{somme des profits} = r \hat{p} \cdot M \hat{y} = \frac{r}{1+r} \hat{p} \cdot \hat{y} = \frac{r}{1+r} v \cdot \hat{y}$$

$$\text{somme des plus-values} = v \cdot \hat{y} - v \cdot M \hat{y} = \frac{r}{1+r} v \cdot \hat{y}$$

Ces deux systèmes de référence $\hat{p}$ et $\hat{y}$ (24) vont nous permettre de préciser l'intuition, énoncée au paragraphe précédent, d'une "compensation" nécessaire de l'écart entre valeur et prix de production par la structure de la production. Toute production y peut en effet se décomposer de manière unique en une composante $\hat{y}$ sur la structure d'accumulation intégrale et une composante $\tilde{y}$ dans l'hyperplan orthogonal à $\hat{p}$:

$$y = \hat{y} \oplus \tilde{y} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \hat{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y} \\ \hat{p} \cdot \tilde{y} = 0 \end{cases}$$

(23) C'est un des résultats adjacents à la démonstration du théorème de Perron-Frobenius.

(24) La direction de $\hat{p}$ étant fixe, on normalise $\hat{p}$ en choisissant un numéraire tel que $\hat{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y}$. La différence entre $\hat{p}$ et v ne dépend plus que de la structure de la consommation des travailleurs d . En revanche, ce qui nous importe est l'écart de la direction de y par rapport à celle de la structure d'accumulation intégrale $\hat{y}$ (définie à un scalaire près). Si l'on veut complètement normaliser ce qui suit, on peut prendre $\hat{p} \cdot \hat{y} = 1$, par exemple.

Si on note : $\delta v = \hat{p} - v$ "l'écart" de $\hat{p}$ à v
 $\delta y = y - \hat{y}$ "l'écart" de y à $\hat{y}$

On a : $\delta v \cdot y + v \cdot \delta y = 0$

En effet : $\delta v \cdot y = (\hat{p} - v) \cdot y = \hat{p} \cdot \hat{y} + \hat{p} \cdot \tilde{y} - v \cdot \hat{y} - v \cdot \tilde{y} = - v \cdot \tilde{y}$
 $= - v \cdot (y - \hat{y})$

Autrement dit, si, à partir d'un schéma de reproduction correspondant à l'accumulation intégrale (où le prix est égal à la valeur) on "déforme" la structure de la production, d'un certain écart, la mesure de cet écart de la production (par la valeur) est la mesure de l'écart des prix de production (aux valeurs) par cette production. Par là est introduit un lien (certes beaucoup plus tenu que dans la tentative de Marx) entre la structure de la production et la transformation de la valeur en prix de production. Mais $\hat{p}$ et $\hat{y}$ restent des fonctions de d , y n'est ici qu'un moyen d'évaluer *après coup* leurs variations corrélatives.

3°) Le taux de profit est une fonction bien déterminée du taux d'exploitation.

Si l'on ne veut pas se contenter du "théorème marxien fondamental", on peut préciser la bijection qui relie (par A , d , ℓ) le taux de profit et le taux d'exploitation. On trouve une fonction :

$$r = f_d(e)$$

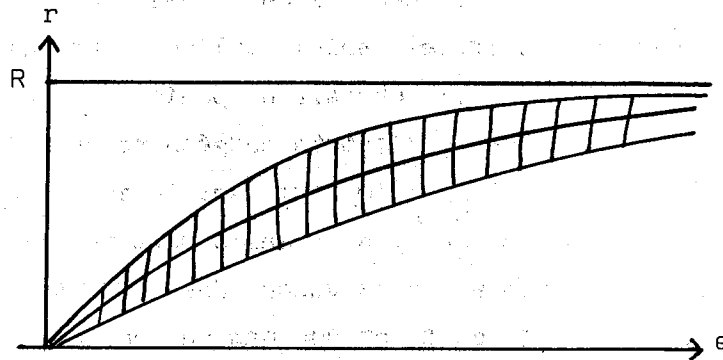
Mais d est fonction de e . Il faut éliminer ce qui dépend de la variable dans la paramétrisation. Or si on élimine l'intensité de l'exploitation, il reste la structure de la consommation. La paramétrisation par la structure de la consommation peut être traitée de différentes manières. J'en citerai deux.

La méthode de G. Duménil [6] consiste à séparer, dans le "panier" d , un effet d'intensité de l'exploitation w et un effet de structure de la consommation d^* en posant :

$$d = w d^*, v \cdot d^* = 1 \quad (\text{rappel : } w(1+e)=1)$$

(la classe ouvrière est exploitée à un taux e , et choisit une structure de consommation d^* dans le simplexe du quadrant positif $v \cdot d^* = 1$). Les courbes $r = f_{d^*}(e)$ sont alors définies par une fonction assez simple ; elles sont toutes bornées, pour e tendant vers ∞ , par la valeur maximale R (correspondant à la

dominante de A, qui est la forme de M quand les salariés "vivent de l'air du temps") ; elles admettent des enveloppes composées d'arcs qui correspondent, pour une valeur donnée de r, aux structures d^* qui maximisent et minimisent la composition organique évaluée d'une façon particulière (25).



Une autre méthode, plus complexe, est proposée par J. Roemer [13]. Elle accorde aux ouvriers la liberté de choisir individuellement la structure de leur consommation. Chaque ouvrier est doté d'une fonction de préférence γ (admettant les propriétés néoclassiques de convexité et de continuité). Le salaire et les prix étant donnés dans le système des prix de production, chacun choisit donc librement comment il répartit son budget. En combinant le théorème de Brouwer et le théorème de Perron-Frobenius, J. Roemer montre qu'il n'existe qu'un seul système de prix tel que les ouvriers choisissent chacun un panier de biens de

[25] On a : $p = (1+r) [pA + s \ell]$ avec $s = p \cdot d$. D'où, en éliminant p , et en utilisant $v = \ell[I-A]^{-1}$: $e = r v [I-(1+r)A]^{-1} d^*$. Comme d^* est une combinaison convexe des consommation de type d_i^* ($(d_i^*)^j = \delta_i^j$), e est, pour une valeur donnée de r , compris entre les points extrêmes des courbes $e = f_{d_i^*}^{-1}(r)$. Il suffit donc de tracer ces courbes (qui s'entrecroisent) pour avoir l'enveloppe des courbes f_{d^*} .

G. Duménil propose encore une expression plus "classique" de f . Si $\bar{y}$ est le vecteur des activités dont le produit net est d ($\bar{y} - A\bar{y} = d$), on a :

$$r = e \left[\frac{p \cdot A \bar{y}}{s \cdot \ell \cdot \bar{y}} + 1 \right]^{-1}$$

On retrouve la formule classique de Marx, mais les compositions organiques sont évaluées en prix de production, et agrégées selon le vecteur particulier $\bar{y}$. Ce résultat, peu intuitif, permet de préciser quelles courbes composent l'enveloppe pour r donné.

valeur w (26). Les courbes sont maintenant paramétrisées par la donnée d'une famille Γ de fonctions de préférence, mais l'allure de la famille des courbes $r = f_{\Gamma}(e)$ est la même.

Cependant, l'utilisation du théorème de Brouwer (qui donne le résultat d'un algorithme partiellement irréalisable) soulève un problème de fond : comment donc les consommateurs peuvent-ils choisir un panier de consommation dans le système des prix alors que leur contrainte budgétaire est fixée dans le système des valeurs par $v.d = w$ (27) ? Problème qui renvoie au caractère hautement contestable du choix commun à tous les "transformateurs" : transformer le capital variable V à partir de la donnée de la valeur des consommations. Encore une fois, les ouvriers reçoivent de l'argent, et non pas un "bon pour un panier". Une fois résolu le problème de la transformation, une fois les choix effectués dans le système des prix, la relation $r = f_{d^*}(e)$ est incontestablement vraie. Mais on peut douter qu'elle corresponde à un schéma causal : $d^*, e \rightarrow r$. En tous cas, pour Marx, le schéma causal était $y, e \rightarrow r$. Cette faiblesse de la solution reçue au problème de la transformation demeure. Nous y reviendrons.

4°) Les prix de production et le taux de profit sont logiquement déterminés par la théorie de la valeur et de l'exploitation.

Nous arrivons ici au point crucial de la polémique. Quelle que soit la force des liens, que nous venons de souligner, entre le système des valeurs et de la plus-value d'une part, le système des prix de production et du profit de l'autre, ces liens apparaissent à première vue comme des liens de cousinage et non de filiation : l'ancêtre commun étant la donnée "technique" des éléments de $A + d \otimes \ell$:

./.

(26) Voici le schéma de la démonstration de J. Roemer. A un vecteur de consommation total $\mathcal{D}$ satisfaisant la contrainte sur w correspond, par Perron-Frobenius, un système de prix de production p (le salaire étant pris pour numéraire). A ce système p correspond (par les fonctions de préférence) une consommation totale $\mathcal{D}'$. Celle-ci est réduite par homothétie à $\mathcal{D}''$ satisfaisant la contrainte sur w . L'application $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}''$ est continue sur un compact convexe. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, il existe $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$.

(27) L'intérêt de la formalisation de J. Roemer est que le résultat de la lutte des classes est synthétisé par la donnée de e , et non de d . Mais, reconnaît J. Roemer, "Cette lutte ne se déroule pas dans un monde abstrait, elle est médiatisée par le procès d'échange aussi bien que dans la production" (p.40).

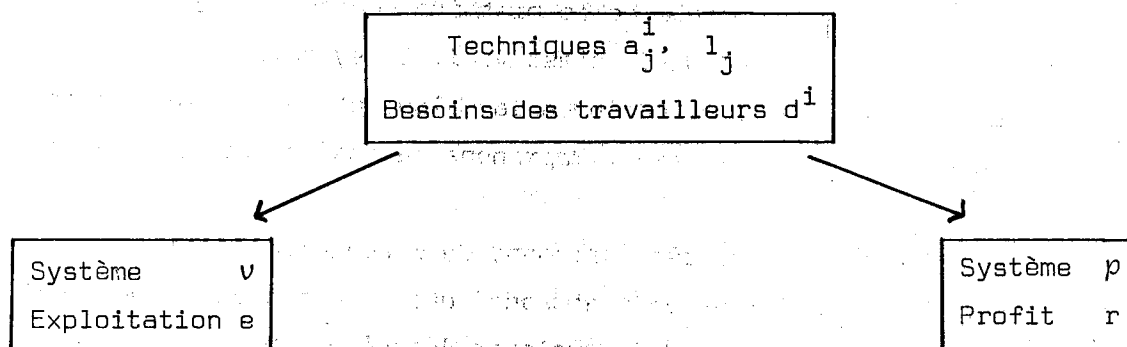


Tableau I

En tout état de cause, la matrice M déterminerait un "surplus", sous la condition "technique" qu'elle soit productive, et ce produit net serait alloué selon deux systèmes :

- soit au prorata du "travail" ajouté pendant la dernière période.
- soit au prorata de la valeur marchande totale des conditions de production (matière première et travail) de la dernière période.

Un peu, fait remarquer P.A. Samuelson [15] comme lorsqu'on évalue l'incidence dans la formation des prix de la taxe à la valeur ajoutée d'une part, de la taxe à la transaction de l'autre. Dans le premier cas, la résolution du système d'équation donnant le système des prix est assez simple : un système de n équations linéaires. Dans le second cas, il faut résoudre une équation algébrique du même degré (28) ! "On peut appliquer, concède P.A. Samuelson, la théorie marxiste de la détermination matérialiste de l'Histoire pour arriver à l'hypothèse que c'est l'incapacité de Marx en algèbre et l'absence d'ordinateur qui l'ont amené à formuler sa théorie de l'exploitation dans les termes du Livre I, qui sont irréalistes mais se trouvent être plus simples à manier algébriquement que les relations Walrasiennes du Livre III" (29). Le problème de la "transformation" est alors résolu très simplement (toujours sur la base de la donnée "technique" de A , d , l) : "Considérez deux systèmes en balance et discordants. Ecrivez en un. Maintenant, transformez le en prenant une gomme et en l'effaçant. Ensuite remplacez le par l'autre système. Voilà !" (30).

(28) $\det [\lambda I - M] = 0$

(29) [15], p.418

(30) [15], p.400

Malheureusement, toute cette belle histoire suppose que la donnée de la matrice M , d'où découle *directement*, c'est vrai, le système (p, r) , soit logiquement située *en amont* de la théorie de la valeur et de l'exploitation (31). Nous avons vu qu'il n'en était rien. Reprenons la chaîne logique, pas à pas.

Au commencement, le caractère marchand de l'économie. D'où la substance et la forme de la valeur. Pour un état donné des forces productives (A, ℓ) , la détermination de la grandeur v de la valeur. Jusqu'ici, pas un mot de la théorie de l'exploitation, ni de la plus-value, ni du profit (32).

Introduisons l'exploitation capitaliste, la vente et l'usage de la marchandise "force de travail", caractérisés par la valeur de cette force et la durée λ et l'intensité ϵ du travail qu'on lui impose. Trois facteurs qui co-déterminent la plus-value et le taux de plus-value. La valeur de la force de travail correspond (moyennant v , déjà acquis) au panier de bien d acheté pour reproduire la force de travail. Tous ces éléments, λ , ϵ , w , e , d , sont directement ou indirectement l'enjeu du rapport de force entre les classes, et sont liés de façon complexe.

* λ et ϵ sont faiblement couplés, et, encore plus faiblement, couplés à d (33).

On peut cependant considérer qu'ils sont logiquement antérieurs à e et à la plus-value. En tous cas, ils sont présupposés au tenseur T liant la quantité

./.

[31] "La faveur des circonstances naturelles fournit, si l'on veut, la possibilité, mais jamais la réalité du surtravail, ni conséquemment du produit net ou de la plus-value. [...] Le surtravail ne peut commencer qu'au point où le travail nécessaire finit. [...] Au milieu de notre société européenne, où le travailleur n'achète la permission de travailler pour sa propre existence que moyennant surtravail, on se figure facilement que c'est une qualité innée du travail humain de fournir un produit net. [...]"

Le travail doit donc posséder un certain degré de productivité avant qu'il puisse être prolongé au-delà du temps nécessaire au producteur pour se procurer son entretien ; mais ce n'est jamais cette productivité, quel qu'en soit le degré, qui est la cause de la plus-value. Cette cause, c'est toujours le surtravail quel que soit le mode de l'arracher" ([11], Livre I, chapitre XVI)

[32] Rappelons que ℓ désigne des quantités de travail abstrait nécessaire à la production des biens. Ces quantités peuvent être fournies en ℓ , 2ℓ , 3ℓ jours de travail salarié !!

[33] On admet que la production ne baisse que de 1 % quand la durée de la journée de travail baisse de 2 %. D'autre part, en temps de Dickens ou même de Jack London, l'intensité du travail pâtissait du mauvais état physique des travailleurs. Mais dans les métropoles occidentales, on n'en est plus là !

de force de travail achetée à la quantité de travail fourni, passage obligé de la détermination des prix de production par des équations de la forme :

$$p = (1+r) (pA + s \ell) \quad (s = \text{salaire})$$

qui, rappelons-le, ne sont qu'une abréviation pour

$$p = (1+r) [(pA + s \ell T^{-1})]$$

(T n'étant diagonal de coefficient 1 qu'à cause du choix des unités).

- * Pour des valeurs données de ϵ et λ , le rapport entre ℓ , d , w est beaucoup plus complexe. L'enchaînement *dynamique* qui semble jouer un rôle directeur est à première vue celui-ci : $e \rightarrow w \rightarrow d$, c'est-à-dire : patrons et salariés s'affrontent sur le partage de la valeur ajoutée, le compromis s'exprime par une valeur reconnue w , les ouvriers dépensent leur argent comme ils veulent.

Cependant, Marx, au chapitre VI du *Capital*, soucieux de donner un sens intuitif à l'expression "la force de travail a une valeur comme les autres marchandises : la quantité de travail qu'il faut pour la reproduire", force un peu l'assimilation en supposant l'existence d'un "panier de consommation ouvrier", sorte de "vecteur input" de l'entreprise-ménage (dont, soit dit en passant, le travailleur - la femme - travaille gratuitement, et dont l'entrepreneur vend le produit à son prix de revient). Léontieff, Von Neumann et Morishima codifieront cette réduction de l'ouvrier à une bête de somme exigeant son picotin.

Même si Marx abandonne très vite la détermination physique d'un "panier de biens salariaux" pour poser la valeur de la force de travail comme une "quantité d'heures payées" (34), il reste que postuler l'existence, à un moment donné, d'une "norme de consommation ouvrière", n'est pas sans justification. Certes, les syndicats ne négocient pas directement le droit à une machine à laver, ni le passage à la télévision en couleur : encore une fois, ils négocient des augmentations de salaire. Cependant, la "norme de consommation" une fois fixée peut difficilement être remise en cause à la baisse, non pour des raisons morales mais... parce que cela mettrait en crise les industries de consommation correspondantes (35) !

./.

(34) Comme le reconnaît volontiers P. Samuelson ([15], p.422), dont on s'étonne qu'il ait alors accepté la transformation à partir d'un panier de biens physiquement donné !

(35) Considération décisive pour la compréhension de la forme inflationniste de la crise actuelle. Voir [1], [2], [11].

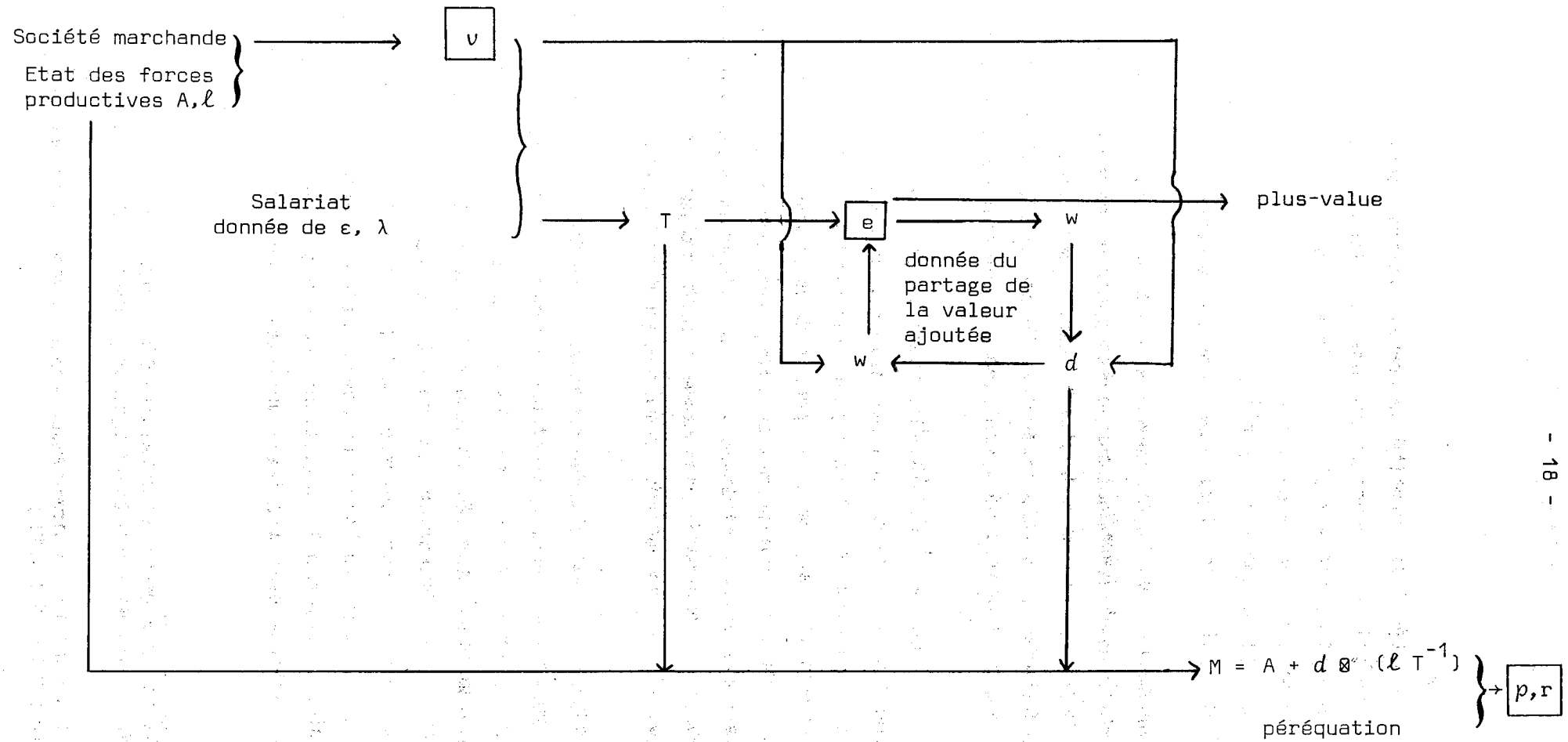
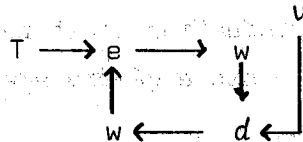


Tableau II

Nous pouvons dire que e et d sont en liaison "dialectique", d constituant la base et e le facteur dirigeant.



d étant maintenant fixé, et le salaire devant couvrir cette dépense dans le système des prix de production, on peut passer au dernier maillon de la chaîne, résumée dans le tableau II. La comparaison - frappante - avec le tableau I justifie le soin mis dès la première partie à décortiquer la signification du symbolisme algébrique utilisé dans la "transformation". Même en supposant d comme une donnée, la théorie de la valeur et de l'exploitation apparaissent clairement comme présumés aux prix de production.

III - UNE NOUVELLE SOLUTION AU PROBLEME DE LA TRANSFORMATION.

La solution habituellement admise aujourd'hui au problème de la transformation des valeurs en prix de production s'est révélée moins incompatible avec les thèses de Marx qu'on ne le pense généralement. Cependant elle s'en éloigne encore notablement.

- * Si la théorie de la valeur et de l'exploitation est bien logiquement requise avant la formalisation qui permet le calcul des prix de production, cela ne se voit pas clairement dans l'algorithme de transformation. On aimerait "voir" la valeur se réaffecter sur les marchandises dans le mécanisme de la péréquation.
- * S'il existe une relation entre la structure de la production et l'écart valeur-prix de production, elle apparaît "ex post", au lieu que la structure de la production (qui détermine, par la pondération des compositions organiques, la quantité de plus-value à péréquuer sur la quantité de capital engagé) apparaisse comme paramètre déterminant du taux de profit et des prix de production. Au lieu de quoi, la structure de la consommation ouvrière semble jouer un rôle déterminant.

1°) Le fond de la question (36).

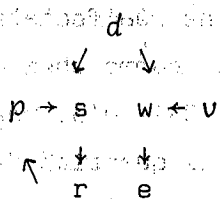
Nous avons vu que la raison de ces anomalies (par rapport aux conséquences intuitives de la théorie marxiste de la valeur et de l'exploitation) résidait justement dans la manière de résoudre le problème de la transformation du capital variable. La solution adoptée consistait à réduire le cas de V au cas (évident) du capital constant C. Il est en effet peu contestable que, si la technique de production (a_j^i, l_j) est donnée (37), le prix d'achat du capital constant C_j est bien $\sum_i p_i a_j^i$. Mais peut-on réduire la force de travail à un

./.

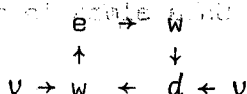
(36) Le principal mérite de la découverte de cette solution nouvelle revient à G. Duménil qui en dégagait [7] les deux conditions fondamentales: définir w à partir de e et non de d , opérer la péréquation sur le produit net. Son argumentation s'appuie sur une profonde compréhension de l'articulation conceptuelle du *Capital* [5]. Cependant j'assume la responsabilité de la présentation qui suit, plus conforme à ma démarche [10], ainsi que de la nécessité et de la démonstration du théorème présenté dans le paragraphe suivant.

(37) Evidemment, la technique la moins coûteuse peut dépendre de e et de r - pire, une technique peut être moins coûteuse en valeur et plus coûteuse en prix de production qu'une autre. Mais nous ne traitons pas ici du problème de la dynamique.

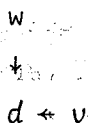
produit exigeant un input d de prix de revient $\sum p_i d_i$? Une telle formalisation ne serait en fait admissible que dans un mode de production "pseudo esclavagiste", c'est-à-dire esclavagiste dans les unités de production et marchand-capitaliste entre les unités, comme dans le Dixieland à la veille de la guerre de Sécession (38). Au contraire, le salarié du capital reçoit une somme d'argent avec laquelle il choisit "librement" sa consommation selon ses besoins Γ . Certes, la contrainte du mode de vie urbain l'oblige à adopter un certain "panier flou", et la valeur de ce panier flou pour une date donnée de l'histoire de la lutte de classe fournit une base à la valeur de la force de travail. Mais cela n'autorise pas à fixer unilatéralement le raisonnement sous la forme :



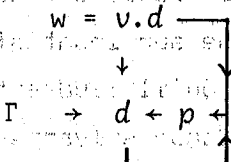
Il est beaucoup plus légitime de formaliser quelque chose du genre :



avec une "boucle" $d \leftrightarrow e$. L'article de J. Roemer se rapproche le plus de cette solution. Malheureusement la "médiation" :



n'est pas admissible, puisque les travailleurs dépensent leur salaire dans le système des prix de production. L'utilisation du théorème de Brouwer revient à formaliser quelque chose du genre :

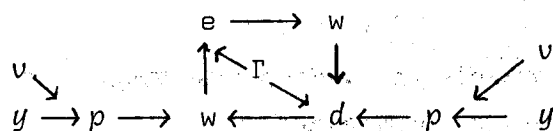


./.

(38) En tout état de cause, la marchandise "force de travail" ne peut être, quoi qu'en dire P. Samuelson, assimilée au produit de la "branche 0", car, dans les entreprises de cette branche, le travail (celui de la femme) serait compté pour rien, et "l'entrepreneur" vendrait le produit sans percevoir de profit. Il en irait autrement si les travailleurs vivaient dans des pensions de famille capitalistes, mais alors le prix de la force de travail serait $(1+r) p.b$, et non $p.b$.

Mais l'algorithme mathématique ne correspond à aucun algorithme pratique : il faudrait que les travailleurs dépensent leur salaire dans le système des prix tout en subissant leur contrainte budgétaire ($v.d = w$) dans le système des valeurs. Il en est ainsi parce que, chez J. Roemer, la valeur de la force de travail, au lieu d'être une part de la valeur ajoutée ($w = \frac{1}{1+e}$) reste implicitement la valeur d'un panier, même si ce panier n'est plus a priori connu (mais il reste présupposé à l'application $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}''$ sur laquelle porte le théorème du point fixe).

Tout devient clair en revanche si l'on part d'une donnée de w en "quantité de valeur", fraction $\frac{1}{1+e}$ de la valeur ajoutée, à dépenser selon un système de prix de production (déterminé par une réaffectation de la valeur qui ne dépende pas de d , mais, par exemple, comme chez Marx, de y), en fonction de "besoins" socialement déterminés Γ (39), d'où résulte un panier d de consommations, dont la valeur (en termes de quantité de travail incorporée, et non de valeur réaffectée) peut fort bien être différente de w , ce "panier" d pouvant servir (s'il est jugé insuffisant) de base à une renégociation du taux e de partage de la valeur ajoutée. On a alors le diagramme logique :



Il se trouve que cette solution, qui implique de traiter très différemment le capital constant et le capital variable, est conforme aux indications qu'a laissées Marx sur la manière dont il voyait la transformation. Ce n'est évidemment pas un critère de vérité, mais dans la mesure où les "transformateurs" ont prétendu formaliser les intentions de Marx pour en démontrer les incohérences, la première exigence est de vérifier si c'est bien la pensée de Marx que l'on a formalisée, et non celle de quelqu'un d'autre. Or que nous dit K. Marx, après avoir témoigné de son insatisfaction devant son petit modèle boiteux de transformation ? Qu'il faudrait maintenant transformer les éléments du prix de revient de la façon suivante :

./.

(39) La famille de fonction de préférence Γ n'est certes pas comme chez Roemer du type convexe - continu de la théorie marginaliste, mais plutôt de type lexicographique (on choisit d'abord le nécessaire, puis le de-plus-en-plus superflu, le rapport entre nécessaire et superflu étant socialement déterminé).

"Outre que le prix du produit du capital B par exemple s'écarte de sa valeur parce que la plus-value réalisée en B peut être supérieure ou inférieure au profit contenu dans le prix des produits de B, la même circonstance vaut à son tour pour les marchandises qui constituent, et la fraction constante du capital B, indirectement, en tant que moyens de subsistance des ouvriers, sa fraction variable. En ce qui concerne la fraction constante, elle est elle-même égale au coût de production plus la plus-value, donc, dans notre cas, égale au coût de production plus le profit. Ce dernier peut à son tour être supérieur ou inférieur à la plus-value qu'il remplace. Pour ce qui est du capital variable, le salaire quotidien moyen est bien toujours égal à la valeur produite pendant le nombre d'heures que l'ouvrier doit consacrer à la production des moyens de subsistance nécessaires. Mais l'écart du prix de production de ces derniers par rapport à leur valeur falsifie ce nombre d'heures lui-même" ([11], t. VI, p.177).

Autrement dit, pour Marx, dans le capital constant, on se contente de modifier l'évaluation de marchandises. Dans le cas du capital variable au contraire, le salaire en tant que représentant un "nombre d'heures" est conservé dans la transformation, en revanche, ce qui est transformé, c'est le "nombre d'heures" lui-même ! On retrouve exactement notre dernier schéma.

Reste à vérifier que tout cela est mathématiquement possible.

2°) La formalisation.

Soit donc v la valeur des marchandises (déterminée par A et ℓ). Soit la donnée d'un taux d'exploitation e et d'une valeur w de la force de travail : $w = \frac{1}{1+e}$. Nous cherchons une réallocation de la valeur totale, (c'est-à-dire du flux global de travail abstrait) produite dans la période, sur la production y de cette même période.

Cette réallocation est d'abord une *réallocation*, c'est-à-dire qu'elle réalloue une même quantité de la substance-travail abstrait. Appelons $\hat{p}_i$ la valeur réallouée à chaque marchandise i . Le vecteur $\hat{p}$ des valeurs réallouées définit le système des prix de production relatifs (le niveau des prix dépendant du choix du numéraire). On doit avoir (c'est une relation de définition) :

$$(H_1) \quad \hat{p} \cdot y = v \cdot y$$

./.

D'autre part, cette réallocation doit réaliser une *péréquation capitaliste* de la plus-value, c'est-à-dire que la valeur péréquée du bien j doit être égale à γ fois ($\gamma > 1$) la somme du capital constant (évalué en valeur péréquée) et du capital variable (évalué par la valeur cédée aux travailleurs en échange de la disposition de leur force de travail), γ étant le même dans toutes les branches (γ n'est autre que $1+r$). Donc, en supposant comme plus haut que le choix des unités de "quantité de force de travail et de "quantité de travail fourni" permette de sous-entendre le tenseur T , on *doit* avoir (c'est encore une relation de définition, dont il faudra vérifier la compatibilité avec la première) :

$$(H_2) \quad \bar{p} = \gamma (\bar{p}A + w \ell)$$

Nous pouvons définir cette péréquation d'une autre manière. Nous voulons que la travail commandé (40), directement (dans la période juste écoulée comptée 0) ou indirectement (dans la période antérieure comptée n) pour produire le bien j (41), contribue à la valeur péréquée p_j de ce produit dans une proportion γ^{n+1} .

$$(H'_2) \quad \bar{p} = \gamma w \left(\sum_0^{\infty} \gamma^n \ell A^n \right)$$

(H'_2) est équivalente à (H_2) qui s'écrit en effet

$$(H''_2) \quad \bar{p} = w \ell \left[\frac{I}{\gamma} - A \right]^{-1}$$

./.

(40) "Le travail commandé" est un concept bâtard de l'économie Classique (A. Smith et D. Ricardo), repris explicitement par K. Marx dans les *Théories sur la plus-value*, et implicitement dans le Livre III du *Capital*. Il désigne la valeur de la main d'oeuvre achetée, fonctionnant comme indice de la valeur du travail fourni. Autrement dit, c'est le capital variable V dans la mesure où il peut servir d'indice de $V+PL$, c'est-à-dire que w et le tenseur T sont sous-entendus. Par exemple, lorsqu'il note C/V la composition organique du capital (dans le Livre III), Marx indique explicitement que V n'y que l'indice de $V+PL$. D'où la perplexité des commentateurs qui ne voient pas en quoi la hausse de la composition organique entraînerait nécessairement la baisse du taux de profit. Si l'on comprend bien (ce que Marx dit !) que la "hausse de la composition organique" est en fait celle de $\frac{C}{V+PL}$, on voit facilement qu'alors le taux de profit tend uniformément (c'est-à-dire quelle que soit l'évolution de $\frac{PL}{V}$) vers 0. (Sur le "travail commandé" et ses pièges, voir [4] et [10])

(41) La quantité de travail abstrait incorporé directement à j est ℓ_j ; celle qui incorporé directement à ses moyens de production est : ℓA_j ; aux j moyens de production de ces moyens de production : $\ell [A^2]_j$, etc... Comme T est unitaire, on obtient le travail commandé en multipliant par w .

ce qui s'écrit (H'_2) en développant en série la matrice inverse (42). On peut faire subir la même opération à :

$$v = (1+e) w \ell (I-A)^{-1}$$

$$\text{Soit } v = (1+e) w \left(\sum_0^{\infty} \ell A^n \right)$$

On voit alors clairement que la péréquation consiste à redistribuer toute la valeur (43) de telle manière que la plus-value soit affectée non pas au prorata de la simple somme des travaux commandés dans les périodes antérieures, mais au prorata de la somme de ces travaux pondérés par un facteur γ^{n+1} . La comparaison de P. Samuelson avec la taxe à la valeur-ajoutée et la taxe à la transaction est juste mais insuffisante. Car la transaction est inutile. Supposons qu'une entreprise de tissage achète une filature de coton. Le travail des fileurs, qui comptait comme capital constant dans la branche, "tissage" (selon la formulation H_2) compte maintenant comme capital variable... mais immobilisé pendant deux périodes au lieu d'une, ce dont rend bien compte la formulation (H'_2)

Le système des valeurs péréquées que nous cherchons (et d'où l'on peut déduire tout système de prix de production par la donnée d'un numéraire) étant maintenant bien défini par H_1 et H_2 , il faut se poser les questions : un tel système existe-t-il, et quelles en sont les propriétés ? Nous n'aurons pas de mal à démontrer le théorème suivant, qui résume la conclusion de Marx sur la transformation.

Théorème de la transformation marxiste.

1. Pour toute structure de la production, il existe une et une seule péréquation capitaliste des valeurs.

./.

[42] La série en H'_2 converge vers la matrice inverse en H_2 dans le disque de convergence $\gamma < 1+R$, ($\frac{1}{1+R}$ dominante de A), ce qui est le cas, on le vérifiera, dès que les travailleurs consomment quelque chose, la matrice A elle-même étant contractante (Voir [8])

[43] Cette décomposition infinie de la part "capital constant" de la valeur en capital variable et plus-value (ou, transformé : du prix des consommations intermédiaires en salaires et profit) avait déjà été pressentie par Adam Smith. Elle suppose une généalogie fictive de la marchandise, à norme de production constantes dans le passé. Ici, nous décomposons la valeur du produit net y ce qui fait que les sommes du capital variable et de la plus-value ne sont en définitive que les parts respectives des travailleurs et des capitalistes dans le partage de la valeur ajoutée. Si nous avions pris y quelconque, ces sommes auraient eu une signification moins immédiate que j'appellerais "somme smithienne".

2. Si on s'en tient au numéraire tel que la somme des valeurs (ajoutées) est égale à la somme des prix, alors la somme des profits est égale à la somme des plus-values.

3. Le taux de profit moyen est fonction du taux d'exploitation, des coefficients techniques des branches, et de la répartition des salariés entre les branches.

Démonstration.

$$1. \forall y, \exists (\hat{p}, \gamma) : \begin{cases} \hat{p} \cdot y = v \cdot y & (H_1) \\ \hat{p} = \gamma (\hat{p} A + w \ell) & (H_2) \end{cases}$$

En effet, en écrivant H_2 sous la forme H'_2 , on voit que $\hat{p}$ est une application continue croissante de γ , donc $\hat{p} \cdot y$ est une fonction continue croissante de γ .

$$\text{Pour } \gamma = 1, \quad \hat{p} \cdot y = \frac{1}{1+e} v \cdot y < v \cdot y.$$

Pour $\gamma = \infty$, $\hat{p} \cdot y$ est infini.

Donc il existe une et une seule valeur de γ , donc un et un seul vecteur $\hat{p}$, satisfaisant (H_1) . Comme elle est supérieure à 1, on écrit $\gamma = 1+r$, r étant le taux de profit positif (44).

2. Soit y le secteur produit "net" (au sens de la comptabilité nationale) dans lequel se matérialise la valeur ajoutée, Y le vecteur des activités correspondant. Par définition :

$$\hat{p} \cdot y = v \cdot y \quad \text{et} \quad Y - A Y = y$$

$$\text{On a : somme des profits} = \hat{p} \cdot y - w \ell \cdot Y$$

$$= v \cdot (Y - A Y) - w \ell \cdot Y$$

$$= e w \ell \cdot Y$$

$$= \text{somme des plus-values.}$$

$$3. r = \frac{\text{somme des profits}}{\text{capital engagé}} = \frac{e w \ell \cdot Y}{(\hat{p} A + w \ell) \cdot Y}$$

$$r = \frac{e}{\frac{\hat{p} A Y}{w \ell \cdot Y} + 1}$$

./.

(44) On voit que pour que r soit positif il faut et il suffit que w soit inférieur à 1, ou e positif. On retrouve ici le résultat du "théorème marxien fondamental" d'Okishio - Morishima, dans un autre système.

$$\text{Or } \frac{\hat{p}}{w} \frac{A}{\ell} \frac{y}{v} = \sum_j \frac{\hat{p}}{w} \frac{A_j}{\ell_j} \frac{1_j}{v_j} \frac{y_j}{v_j}$$

C'est la moyenne, pondérée par la part du travail salarié occupée dans les différentes branches, des compositions organiques des branches, évaluées en prix de production. Ces dernières ne sont fonction que des compositions techniques des branches et du système des prix de production qui ne dépend lui-même que de e , y , et des coefficients technique a_j^1 et l_j (45).

Cette formulation est fort peu maniable, puisqu'elle exige la connaissance de $\hat{p}$: je ne l'ai donnée que pour sa similitude avec la formule de Marx, reconnue fautive par l'auteur (46).

On peut maintenant calculer la formule directe, à la Duménil-Roy.

$$\text{Partons de : } \hat{p} \cdot y = v \cdot y$$

En utilisant la formule (H_2''), et la relation $w(1+e) = 1$, on a :

$$w \ell \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y = (1+e) w v \cdot y$$

$$\text{D'où : } e = \frac{\ell}{v \cdot y} \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y - 1$$

Ce résultat ne dépend que de la structure de y . Posons $v \cdot y^* = 1$.

$$e = \ell \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y^* - v \cdot y^*$$

Or $\ell = v(I - A)$, donc :

$$\begin{aligned} e &= v \left[(I - A) \left(\frac{I}{1+r} - A \right)^{-1} - I \right] y^* \\ &= v \left[\left(\frac{r}{1+r} I + \frac{I}{1+r} - A \right) \left(\frac{I}{1+r} - A \right)^{-1} - I \right] y^* \\ e &= r v [I - (1+r) A]^{-1} y^* \end{aligned}$$

e étant fonction croissante continue de r , on a cette fois une fonction :

$$r = f_{y^*}(e)$$

(45) Naturellement, ces coefficients "techniques" a_j^1 et l_j matérialisent des rapports sociaux : parcellisation du travail, taylorisme, fordisme etc... Par "technique" j'entends seulement que ces coefficients sont donnés avant les conditions de l'extorsion de plus-value, avant la donnée de T , e , w , et surtout (c'est la différence essentielle avec la solution de Morishima) indépendamment de d .

(46) Dans la transformation approximative de Marx, où l'on a : $r = \frac{\sum PL_1}{\sum (C_1 + V_1)}$, les compositions organiques sont à évaluer en valeur. C'est ici le seul endroit où se concrétisent les conséquences de cette approximation.

fonction qui s'obtient à partir de la fonction $r = f_{d^*}(e)$ de la deuxième partie en remplaçant d^* par y^* . Cette courbe est croissante, concave, admet une asymptote $r \rightarrow R$ ($\frac{1}{1+R}$ dominante de A), et une tangente positive finie à l'origine (47). L'enveloppe de la famille indicée par $\{y^*\}$ est composée, de la même manière, d'arcs de courbes particulières (celles correspondant aux y_j^* qui maximisent et minimisent la composition organique).

(47) En développant en série l'expression $e = f_{y^*}^{-1}(r)$, on voit que pour tout r $\frac{d e}{d r}$ et $\frac{d^2 e}{d r^2}$ sont positifs, et qu'à l'origine $\frac{e}{r}$ tend vers $v(I - A)^{-1} y^*$

IV - COMPARAISON DES DEUX SOLUTIONS.

Nous avons donc obtenu, avec la nouvelle solution (que j'appellerai dorénavant "système B") tous les résultats que Marx attendait de la transformation des valeurs en prix de production. Les résultats fournis par la solution du type M. Morishima (que j'appellerai dorénavant "système A") sont-ils donc faux ? Non, bien sûr : ils sont mathématiquement corrects, économiquement compatibles avec la théorie marxiste de la valeur et de l'exploitation. Enfin, si, la transformation une fois réalisée selon le système B, les travailleurs ont l'esprit assez moutonnier pour choisir tous le même vecteur de consommation d , les résultats du système A seront rigoureusement exacts. Pourtant ils sont apparemment différents de ceux du système B !

Il n'y a là nulle contradiction : simplement, e et w n'ont ni la même signification, ni la même grandeur, dans les deux systèmes, bien qu'ils servent d'indices de mesure aux mêmes concepts.

Dans le système A, w_A est la valeur de ce que les travailleurs consomment :

$$w_A = v.d$$

Dans le système B, w_B est la part de la valeur qu'ils ont créée et qu'ils ont obtenu le droit de dépenser, sur un marché où les prix sont réglés par des valeurs péréquées.

$$w_B = \frac{1}{1+e_B}$$

Il n'y a aucune raison pour que : $w_A = w_B$, $e_A = e_B$. En effet, en règle générale, la valeur incorporée dans les emplois du salaire n'est pas la part de la valeur produite, rétrocédée aux travailleurs et dépensée selon un système de valeurs réaffectées.

$$w_A = v.d \neq w_B = \frac{1}{1+e_B}$$

La transformation ayant eu lieu, pour y donné, selon le système B, existe-t-il une structure $\bar{d}^*$ de la consommation des travailleurs telle que $w_B = v.\bar{d}^*$? La réponse est évidente d'après la seconde partie : c'est la structure $\bar{d}^*$ telle que le vecteur y en soit vecteur d'accumulation intégrale $\bar{y}(\bar{d}^*)$. Dans tous les

./.

autres cas, tous les résultats séparément calculés restent valables, avec $e_A \neq e_B$ et $e_A = f_{y^*} d^* (e_B)$ ($f_{y^*} d^*$ étant la composition des applications bijectives $f_{d^*}^{-1} \circ f_{y^*}$). Ces résultats sont résumés dans le tableau III.

La solution B serrant au plus près l'intuition et le texte de Marx, étant aussi plus facile à manier mathématiquement, faut-il relèguer "l'ancienne" solution, fruit de plus d'un demi-siècle de travail, au musée des curiosités de l'histoire de la pensée économique ? Je ne le pense pas, car elle nous a obligé à explorer attentivement (du moins, dans les développements que j'ai présenté) le contexte conceptuel de la transformation : c'est-à-dire tous les problèmes liés à la "réalisabilité" du couple (y, d) . Alors que la nouvelle solution, justement à cause de sa simplicité, n'utilise même pas le fait que la production nette y est réalisée, s'inscrit dans un schéma d'accumulation. Ce que l'on gagne à exprimer directement $r = f_{y^*}(e)$, on le perd dans la totale indétermination apparente de y^* .

Prenons un exemple (48). Soit e_B la part de la valeur ajoutée qui revient aux travailleurs, avec laquelle ils s'empressent d'acheter le nécessaire, voire

./.

(48) En voici un autre, que je ne développerai pas ici car il suppose la levée de l'hypothèse d'indécomposabilité de la matrice sociotechnique, ce qui rallongerait encore cet article. On sait que s'il existe un secteur de productions non fondamentales (biens de luxe), le taux de profit est déterminé, dans la solution A, par la seulesous-économie des biens fondamentaux. Ce résultat choque des marxistes : le taux de profit général ne serait donc pas influencé par la plus-value produite dans cette "section III" ? Implicite à cette critique, on trouverait sans doute l'intuition que, si la section III a une faible composition organique, il suffirait d'augmenter la part de travail salarié affecté à cette section pour augmenter le taux de profit général. Cette intuition repose sur l'apparence d'une totale indétermination de la structure y dans la solution B. Or cette apparence est trompeuse. La production de la section III doit être réalisée, et - mis à part l'auto-consommation des capitalistes de cette section - elle l'est au titre des emplois de la plus-value des autres sections. La composante non fondamentale y_{NF} du vecteur y est donc une fonction des composantes $\hat{y}_F$ et $\tilde{y}_F$. Naturellement, en prenant en compte ces contraintes, on retrouvera tous les résultats de la solution A. Mais celle-ci nous donne directement le résultat que, une fois donnée la consommation ouvrière d , quelle que soit la structure de production y , pourvu qu'elle respecte la contrainte de pleine réalisation, le taux de profit reste constant. Ce joli résultat ne mérite pas d'être négligé.

TABLEAU III

COMPARAISON DES DEUX

SOLUTIONS

Système A

Système B

v = valeur = nombre d'heures incorporées
(th. de la valeur)
 e = partage des heures incorporées
(th. de l'exploitation)

Cette part e_A est définie par la valeur incorporée dans la consommation d des travailleurs.

Cette part e_B est définie a priori, et les travailleurs l'utilisent à acheter des marchandises de valeur réaffectée $\hat{p}$

$v.d$ défini a priori

$v.d$ défini après la transformation

r et $\hat{p}$ uniques

(à un scalaire près) quand :

d est donné

y est donné

$$r = f_d^* (e_A)$$

$$r = f_y^* (e_B)$$

r varie selon la structure de la consommation ouvrière

r varie selon la structure de la production

r ne varie pas selon la structure de la production

r ne varie pas selon la structure de la consommation des travailleurs

Si le numéraire est choisi tel que

$$\Sigma \text{ prix} = \Sigma \text{ valeurs}$$

$\Sigma \text{ profits} \neq \Sigma \text{ plus-values}$
(sauf si $y = \hat{y} (d^*)$)

$\Sigma \text{ salaires} \neq \Sigma \text{ valeurs consommées}$
(sauf si $d = \hat{d} (y^*)$)

mais :

mais :

$$\Sigma \text{ valeurs des emplois du profit} = \Sigma \text{ plus-values}$$

$$\Sigma \text{ profits} = \Sigma \text{ plus-values}$$

un peu de superflu. Mais, stupéfaction : il suffit que la production s'oriente différemment pour que le système des prix varie et que, par conséquence, la frontière des paniers de consommation accessibles se déplace ! Ainsi, pour un même taux d'exploitation, une même valeur de la force de travail, les travailleurs pourraient s'offrir ou bien le nécessaire et un peu de superflu, ou bien même pas le nécessaire, selon l'orientation de la production ! Voilà qui ne correspond guère au sens commun marxiste...

Dans le système A, le phénomène correspondant s'énonce de la façon suivante : étant donné w_A la valeur de la force de travail, le taux de profit général dépendra de la structure de consommation d^* . Résultat que je trouve pour ma part beaucoup moins choquant (49). C'est tout simplement la forme, transformée et enrichie, que prend dans la transformation la théorie de la plus-value relative. Marx désigne par ce concept l'accroissement du taux de plus-value lié à la baisse de la valeur des biens du "panier" d (baisse qu'on ne peut d'ailleurs plus distinguer, dans la solution B, d'une pure et simple baisse du salaire réel, sauf à vérifier les effets d'un y invariant). Mais supposons une transformation technologique qui laisse invariante la valeur de d , mais modifie dans un sens moins capitalistique la composition technique des branches produisant les éléments de d . Il n'y a pas de plus-value relative, alors que le taux de profit, intuitivement, doit s'élever. Résultat que la solution A explicite en montrant qu'à valeur égale de la force de travail, le taux de profit s'élèvera si la consommation des travailleurs s'oriente vers des branches moins capitalistiques, et inversement (50).

Dans le capitalisme contemporain, caractérisé par une liaison étroite - pour des raisons de "réalisabilité" des gains de productivité - entre la substitution des machines aux hommes dans la production, et l'extension aux travailleurs de la "société de consommation" (phénomène que A. Gramsci a

./.
(49) Jugement subjectif, naturellement : G. Duménil trouve ce résultat à ce point monstrueux qu'il l'aurait incité à s'orienter vers la solution B.

(50) Je mélange ici statique comparative et dynamique. Mais il suffit d'imaginer l'existence de deux biens substituables de même valeur, mais produits dans des branches de composition technique très différentes. Le "choix" massif des travailleurs pour l'un ou pour l'autre aura le même effet sur le taux de profit qu'une révolution technologique du type que je décris.

appelé le "fordisme"), les structures des vecteurs y et d sont intimement liées par des processus dynamiques complexes (51) où joue à fond la dialectique :

$$\begin{array}{ccc} e & \rightarrow & w \\ \uparrow & & \downarrow \\ w & \leftarrow & d \end{array}$$

Dans ces conditions, il est utile de savoir jouer alternativement du système A et du système B.

Mais on entre ici dans le domaine de la dynamique du capitalisme, où se posent les problèmes autrement graves des tendances contradictoires du taux de profit, des crises de réalisation, de l'inflation... Problèmes essentiels sur lesquels se sont penchés en priorité Marx et ses principaux successeurs, quitte à laisser de côté le petit exercice technique que P. Samuelson n'a peut-être pas eu tort, finalement, d'appeler le "soi-disant problème de la transformation".

A. LIPIETZ

Janvier 1979

(51) Ces mécanismes sont au coeur de ce que j'appelle "la régulation monopoliste de l'accumulation intensive" (voir [11]).

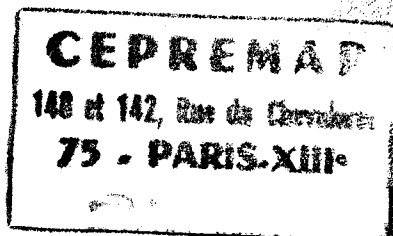
- [1] M. AGLIETTA , Régulation et crises du capitalisme. L'expérience des Etats-Unis, Calmann-Lévy, Paris, 1976.
- [2] J.P. BENASSY, R. BOYER, R.M. GELPI, A. LIPIETZ, J. MISTRAL, J. MUNOZ, C. OMINAMI ; Approches de l'inflation : l'exemple français, Publication CEPREMAP, Paris, 1977.
- [3] C. BENETTI, C. BERTHOMIEU, J. CARTELIER , Economie classique, Economie vulgaire, P.U.G.-Maspéro, Grenoble, 1975.
- [4] C. BENETTI et ALII, Marx et l'économie politique. Essais sur les "Théories de la plus-value" PUG-Maspéro, Grenoble 1977.
- [5] G. DUMENIL, Le concept de loi économique dans "Le Capital", F. Maspéro, Paris, 1978.
- [6] G. DUMENIL, C. ROY, "Pour une approche fonctionnelle du théorème marxien fondamental d'Okishio-Morishima", article à paraître, Paris, Août 1978.
- [7] G. DUMENIL, La Transformation, ouvrage à paraître, Paris, Octobre 1978.
- [8] F.R. GANTMACHER, Théorie des matrices, Dunod, Paris, 1968.
- [9] A. LABRIOLA, Essais sur la conception matérialiste de l'histoire, Gordon and Breach, London-Paris, 1970.
- [10] A. LIPIETZ, Crise et inflation : Pourquoi ?, F. Maspéro, 1979.
- [11] K. MARX, Le Capital, Ed. Sociales, Paris (Livre III, tome I : 1969).
- [12] M. MORISHIMA, Marx's economics. A dual theory of value and growth, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [13] J. ROEMER, "Marxian models of reproduction and accumulation", Cambridge Journal of Economics, 1978, 2, p.37-53, Academic Press, London.

[14] P. SALAMA, Sur la valeur. Eléments pour une critique, F. Maspéro, Paris, 1975.

[15] P.A. SAMUELSON, "Understanding the Marxian Notion of Exploitation : A Summary of the So-Called Transformation Problem Between Marxian Values and Competitive Prices", Journal of Economic Litterature. June 1971, IX, p.399-431.

[16] D. YAFFE, "Valeur et prix de production dans "Le Capital" de Marx", Critiques de l'Economie Politique, n°20, Avril-Juin 1975, F. Maspéro.

-:-:-:-:-



N° 7902 BIS

THE "SO-CALLED TRANSFORMATION
PROBLEM" REVISITED

by

Alain LIPIETZ

THE "SO-CALLED TRANSFORMATION
PROBLEM" REVISITED.

A lot of ink has flown since Von Bortkiewicz criticized the way Marx dealt with the transformation problem between values and prices of production in Volume III of Capital [11]. Of course, today, nobody would claim this "mistake" did open "the crisis of marxism" (1). Such a petty problem deserves neither so much glory nor such injury. Yet, today the commonly admitted rectification (let us take for reference that of M. Morishima (2)) implies a considerable loss of prestige of the marxist theory of value. That one is brought back to a rather primitive and approximative formulation of the notion of labor exploitation. At least, it is the interpretation of M. Morishima himself (with his "fundamental marxian theorem" : "the equilibrium rate of profit is positive if and only if the rate of exploitation is positive"), as well as that of P.A. Samuelson. For the latter,

"Although Capital's total findings need not have been developed in dependence upon Volume I's digression into surplus values, its essential insight does depend crucially on comparison of the subsistence goods needed to produce and reproduce labor with what the undiluted labor theory of value calculates to be the amount of goods producible for all classes in view of the embodied labor requirements of the goods. The tools of bourgeois analysis could have been used to discover and expound this notion of exploitation if only those economists had been motivated to use the tools for this purpose." (3)

"The tool of bourgeois analysis" : that is to say, the theories according to which the time of the owners' saving, being as scarce a good as labor, also deserves a specific income (the interest).

In such a situation, many marxist authors, especially in France, prefer to stick to a prudent denial of Morishima-type of formalisations, objecting criticisms rather irrelevant to the point in discussion. Some of them even refuse, because of too strict epistemologic criteria, to deal with the transformation problem itself (4).

The chief aim of this paper is to show that the Morishima-type of solution, reevaluated and completed, is not contradictory to the main claims of Marx's Capital, but still there is another solution (5) more faithful to the approach of Capital, and which exhibits the famous equalities of Volume III discarded in Morishima's solution : "Sum of prices = sum of values ; Sum of profits = sum of surplus values". Moreover, it will be shown that for any given output structure, the rate of profit is dependent on this structure and not on the workers' consumption structure (as it is implied by M. Morishima).

The first part will be concerned with Marx's solution and its criticisms, the second one with the Morishima type of solution, the third one with the new solution, and the last one with a comparison of these two solutions.

I - MARX'S APPROXIMATIVE SOLUTION.

For Marx (6), the commodity exchange character of the economy confers a "value" to the output of economic units. This value is proportional to the part of social abstract labor allocated by society to their production and socially validated in exchange (that is to say : recognized as useful by being purchased). In a modern, algebraic formalisation, each bundle of commodities can be represented by a vector y in a space naturally spanned by the n different units of use-value. Thus, value is a linear form v on this space, which maps y into a positive real number (7).

In a supposed standard productive operation, the "living labour" applied to means of production adds value to the value already embodied by "past labour" in the means of production (8). So, let a_j^i be the quantity of good i which is necessary to the standard production of good j , A be the "technical matrix", $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_j]$ the quantity of value embodied by abstract labour when applied to the production of one unit of good $1, \dots, j, \dots$. The value covector is thus defined by :

$$\begin{aligned} \text{Or : } \quad v &= v A + \ell \\ v &= \ell (I-A)^{-1} \end{aligned}$$

Let us remark that this way of "adding" living labour to embodied value (9) arises some reserves, and is refused by some French marxists (10). In fact, it is quite admissible, as far as the norms of production remain constant, and as far as economy is studied in its reproduction. Then, the "embodied value" of the inputs of some sector is equivalent to the present labour applied in some other sector. Of course this does not hold when an evolution of productive forces is assumed, and it is part of a marxist explanation for inflation and crisis (11). Anyway, in all the "transformation controversies" the two assumptions hold.

Up to this point, nothing has been said about the capitalist character of our economy. The marxist approach, as any scientific approach, goes on by successive approaches of the abstract determinations of concrete reality (12) : first one studies the fall of bodies in the void, then one introduces air resistance, and so on. In the first section of volume I, Marx lays down and studies the law of value (substance, measure, form of value) for any commodity production. Then he studies the partitions introduced by the capitalist relations in the measure of value (C/V/PL). Later

(in Volume III) he introduces the transformations in the forms of the law of value itself, induced by the capitalist relations.

With capitalism, the labour power appears to the capitalist as a commodity, with a value w . This value is the amount of labour time, which the workers got the right to spend on the market when purchasing consumption goods in order to reproduce their labour power daily. This commodity has a use-value elsewhere : to product abstract labour, and thus to add value. The amount of abstract value v_a that can be extracted from the commodity "labour power" is defined by the duration λ and the intensity ϵ of labour. The three data w , ϵ , λ , are the results of a historical process, of the "class struggle" (13). Together, they determine the rate of surplus-value e , which is the ratio of the "unpaid labour" $v_a - w$ to the value of the labour power w . Thus, by definition :

$$w (1+e) = v_a$$

In the vector formalisation, we have now :

$$v = v_a A + w \ell + e w \ell$$

That is the modern form for Marx's C+V+PL. It is to be noted that, in these formalisations, we assume that the quantity of the commodity "labour power", which capitalists need to purchase and set to work in order to produce the good j , is measured by the same number as the quantity of abstract labor. This implies that we have taken the intensity and length of the working day for data, and that we have chosen one "worker-day" (for instance) as unit of labour power, and the abstract labour produced in one day as unit of value. And, of course, the productive operations being assumed standard, concrete labor is identified with socially-necessary labour. In other words, the existence of a tensor T is to be assumed, mapping n -uples of commodity "labour power" into covectors of "value added", and the coefficients of which are defined by intensity and duration of labor (14). These are petty trivial things, but, in forgetting them, we are induced to identify "commandable labor" and "embodied labour", just as the classical pre-marxist authors Smith and Ricardo did (15), and (that is more important in our discussion) to identify a social relation and a technical relation between "quantities of input and output".

The illusion of a pure technical relation between input and output is complete when it is assumed that, just as the production of a good j is summarized by the coefficients of the standard productive operation (a_j^i, l_j) , so there exists a standard consumption bundle corresponding to one worker-day : d . Then :

$$w = v.d$$

and the existence of the quantity l_j of labour-power fades away into the data of a bundle of commodities indirectly required by the production of j : the vector $[d^i l_j]$, added to the vector $[a_j^i]$. Now we have a "technico-social" matrix :

$$M = A + d \otimes l \quad (= A + d \otimes (l T^{-1}))$$

($\otimes$ is the sign of the tensorial product, or, in the matricial representation, of the Kronecker product).

This matrix looks purely "technical", but the three determining elements of the theory of value and exploitation are already incorporated in it :

- by the v - measure of d (as far as value of labour-power w is concerned)
- by T , the (maybe implicit) tensor mapping quantity of labour-power into quantity of embodied labour (as far as λ and ϵ are concerned)

But the transformation of the law of value is only beginning. If exchanges in a pure commodity economy are regulated by the value of products through competition, how are exchanges between economic units regulated when these units are individual capitals, when "commodities are products of capital" (16), that is to say, of labour engaged by capital, not of labour alone ? In Marx's view, the answer must be : a transformed value, so that the quantity of surplus-value (called then "profit") returning to each capitalist be in proportion to engaged capital. The value produced in one period by the Society "working as a unique force", is then reallocated onto outputs (by competition between individual capitals (17)), the "transformed value" or "price of production" being settled by the condition upon the equalization of profit rates. So, the sum of values will be equal to the sum of prices of production, and the sum of surplus values will be equal to the sum of profits, or, at least, the ratio of these two pairs of quantities (a ratio depending on the choice of the numéraire) must be the same.

Is there a mathematical possibility for that ? Yes, is Marx's answer, for it is the mere consequence of the theory of value and exploitation. And he presents a simple algorithm, in Volume III (unachieved at his death).

Let us assume a partition of economy into industries or sectors i , each of them producing a value : $M_i = C_i + V_i + PL_i$, (in our formulation : $M_i = v_i y^i$, y^i being the physical output of i). In each sector the value of engaged capital is $C_i + V_i$. Total surplus-value is PL_i . The general rate of profit is :

$$r = \frac{\sum PL_i}{\sum (C_i + V_i)}$$

If each sector is to realize the same rate of profit, then it is sufficient to "equalize" only the surplus-value, and the output is thus valued in production-prices :

$$PP_i = (C_i + V_i) (1+r)$$

Of course, then, the two "invariance conditions" hold. And the average rate of profit is determined :

- by the rate of surplus value e
- by the organic composition of capital of various sectors C_i/V_i
- by the relative weight of the variable capital allocated to the different sectors (hence by the vector of outputs y).

This model suffers of two limitations. Firstly, all sectors are assumed to have the same turnover period. Marx developped many calculus in order to evaluate the consequences of this simplification. But that is not the clue of the controversy. Simplifications are natural within a scientific approach, and we shall stick to this one in the text (18). No, the criticisms hold upon another simplification, this one less justifiable : capitalists do not purchase conditions of production "at their value" C_i and V_i , but at their price of production. The "reallocation" of value operates not only upon PL_i but also upon C_i and V_i . That point is clearly noted by Marx himself (19), but he thinks that the point is of weak concern, and he goes on to what he thinks to be more important. What a mistake ! People don't forgive easily this kind of benign neglect from great thinkers... And

unfortunately, authors who have taken upon the correction of this neglect made it in such a way that they cancelled the main idea of Marx. Namely : the profit, far from being the "reward of abstinence", is *actually* an unpaid part of the value created by productive labour.

II - THE ACCEPTED SOLUTION TO THE TRANSFORMATION PROBLEM.

In order to cope with Marx's neglect, we must assume that labour and means of production are now purchased "at their price of production". What does that mean ? As far as C_1 is concerned, there is no problem : it means the valuation of the commodities "means of production" by the prices of production. But what does it mean "to purchase labour-power at its price of production" ? Actually, V_1 is but an amount of money, granted to workers, and representing a fraction of their value added (this fraction being defined by the rate of surplus-value). Yet the first "transformers" stroke upon an expedient that will turn out not to be neutral. Their solution consists in valuating the labour-power, not directly by this share of value added, but indirectly by the value of the commodity-bundle d that this part would purchase, when it is assumed that all workers purchase the same bundle and spend their money on a market where relative prices are regulated by the system of values.

Let us admit it, for a while. Then, V_1 is transformed just alike C_1 , by valuating d according to the same prices of production. Let be p the covector of prices and r the average rate of profit.

$$\text{Now : } p = [p A + (p.d) \ell] (1+r)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{1+r} p = p [A + d \otimes \ell] = p M$$

Thus p is the left-eigenvector corresponding to the eigenvalue $\frac{1}{1+r}$ of the technico-social matrix M . But p is non-negative, and so is M . The Perron-Frobenius theorem (20) tells us that p must be eigenvector associated with the root of Frobenius $\mu(M)$.

$$\text{Thus : } r = \frac{1}{\mu(M)} - 1$$

First remark : μ depends only on M , that is on A , p and d (which elsewhere define e). Among the set of vectors d such that $v.d = w$ (that is : for a constant rate of surplus-value), r depends only on the direction of d (that is : on the working class consumption structure). *And not at all on the structure y of total output.*

./.

Yet for the marxist tradition there is something still worse. Let us take the *numeraire* such as : sum of prices = sum of values, or $p.y = v.y$. Then :

$$\text{Sum of profits} = r p M y$$

$$\text{Sum of surplus-values} = e w l.y$$

Theses sums are not equals but iff :

$$(r p M - e w l). y = 0$$

That means : iff y belongs to a $n-1$ - multiplicity. Yet a priori y belongs to a n -multiplicity (21). Thus, excepted on a zero-measured subset, the "invariance condition" does not hold :

$$\frac{\text{Sum of prices}}{\text{Sum of values}} \neq \frac{\text{Sum of profits}}{\text{Sum of surplus-value}}$$

Faced with these two results, many marxists preferred to veil their face. They are wrong, in my opinion. Not only because M. Morishima, Okishio and Seton supplied this little drop of comfort, the "fundamental marxian theorem : $r > 0$ iff $e > 0$ " (22). But also because this conceptual framework provides nearly all the learnings Marx was awaiting from his model.

1°) The value of commodities recovered by capitalists is in fact the surplus-value.

In other words : even if the sum of profits differs from the sum of surplus-values, the value of the uses of profits is actually the social surplus-value. The proof of this theorem is quite trivial. It is simply to be noted that, when writing :

$$p = (1+r) p M$$

we mean that all production is realized, there is no over-production. On the other hand, the product of the period, y , is needed :

- for the reproduction of the conditions of production : $M y$
- for the improductive consumption of capitalists : C
- for the production of the conditions of accumulation : $M \Delta y$

The uses of profits are represented by the last two terms.

Thus : $y = My + C + M \Delta y$

$v. (y - My) = v (C + M \Delta y)$

and $e w ly = v (C + M \Delta y)$

Q.E.D.

In a more intuitive way, it is clear that if capitalists are to sell commodities at prices diverging from values, they are to purchase commodities from each other in the same conditions, and there must be some compensation, in a way we are now to explain.

2°) Prices of production regulate the behaviour of "capitalist adequate to his concept".

In the last paragraph, the "improductive consumption" C of capitalists was undetermined, and that was inherent to the level of abstraction which is ours. C could not be determined but by new psycho-sociological considerations. In theory, the capitalist, according to Marx's words, is but the "functionary of its own capital", that is, of a value the only claim of which is its own valorisation. So let us reduce capitalist to his essential character: he would obey the famous calvinist ethic according to Max Weber. Exceedingly frugal, he would accumulate all his profits, and into his own sector, for he has no reason (provided there is no other determination) to behave another way.

So let $p_i y^i(t)$ be the turnover of the sector i at time t . It is completely dedicated to the purchase of the conditions of expanded production in the next period $y^i(t+1)$:

$$\begin{aligned} p_i y^i(t) &= (p M)_i y^i(t+1) \\ &= \frac{1}{1+r} p_i y^i(t+1). \end{aligned}$$

Thus : $y^i(t+1) = (1+r) y^i(t)$

Or : $y(t+1) = (1+r) y(t)$

./.

On the other hand, these conditions of production (including consumption goods for newly recruited workers) constitute the whole gross output of period t :

$$y(t) = M y(t+1)$$

$$\text{so : } y(t+1) = (1+r) M y(t+1)$$

The gross output vector is therefore $\hat{y}$, the right eigenvector associated with the Frobenius root $\mu(M)$; its growth goes on at the rate r : it is the famous "balanced growth path" that M. Morishima calls "Marx-Von Neumann model" and which makes steady the maximal growth (23). Let us call it "integral accumulation model".

For this structure $\hat{y}$ of production (of zero-measure in the set of all feasible structures, but enjoying an undisputed legitimacy !) it is easy to prove that, when chosen the production prices at a level $\hat{p}$ such that $\hat{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y}$, then :

$$\text{sum of profits} = r \hat{p} \cdot M \hat{y} = \frac{r}{1+r} \hat{p} \cdot \hat{y} = \frac{r}{1+r} v \cdot \hat{y}$$

$$\text{sum of surplus values} = v \cdot \hat{y} - v \cdot M \hat{y} = \frac{r}{1+r} v \cdot \hat{y}$$

$$\text{So : } \text{sum of profits} = \text{sum of surplus values.}$$

These two systems of reference $\hat{y}$ and $\hat{p}$ (24) now allow us to give a more accurate notion of the "compensation" (referred to in the last paragraph) of the divergence between values and prices by the structure of production, as soon as the problems of realisation and accumulation are taken into account. As a matter of fact, any production vector y may be split in a unique way into one component $\hat{y}$ on the integral accumulation structure and one component $\tilde{y}$ in the hyperplane orthogonal to $\hat{p}$, so that :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \hat{y} \oplus \tilde{y} \\ \hat{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y} \\ \hat{p} \cdot \tilde{y} = 0 \end{array} \right.$$

Let us denote $\delta v = \hat{p} - v$ the "divergence" from v to $\hat{p}$

$\delta y = y - \hat{y}$ the "divergence" from y to $\hat{y}$

$$\begin{aligned} \text{So : } \delta v \cdot y &= (\hat{p} - v) \cdot y = \hat{p} \cdot \hat{y} + \hat{p} \cdot \tilde{y} - v \cdot \hat{y} - v \cdot \tilde{y} = - v \cdot \tilde{y} \\ &= - v \cdot (y - \hat{y}) \end{aligned}$$

Thus :

$$\delta v \cdot y + v \cdot \delta y = 0$$

In other words, we can propose the :

Theorem of price-value compensation. When the structure of the gross output is deviated from the integral accumulation model, the v -valuation of this deviation is equal to the valuation of the divergence between value and prices of production by this output (understood as a linear form on the set of covectors).

So there is a connection between the structure of output and the divergence from value to prices. But it looks as a much weaker connection than in Marx. Up to here, $\hat{p}$ and $\hat{y}$ are both functions of M , hence of d , and y is but a mean to estimate ex post their correlative variations.

3°) The rate of profit is a well defined function of the rate of surplus-value.

If one is unsatisfied with the "marxian fundamental theorem", one may try to get explicitly the one-to-one function that links e and r through the parametric data A , d , ℓ . But, as far as d is concerned, the form : $r = f_d(e)$ is unsatisfying, because d is itself constrained by e (namely : $(1+e) v \cdot d = 1$). So we must separate more clearly the variable (the intensity of exploitation) and the other social parameters (the orientation of workers' consumption). How can it be done ? I will indicate two ways.

The method of G. Duménil [7] consists in decomposing the bundle d of consumption into its v -norm w , and the data of the structure of consumption d^* :

$$\begin{cases} d = w d^* \\ v \cdot d^* = 1 \end{cases}$$

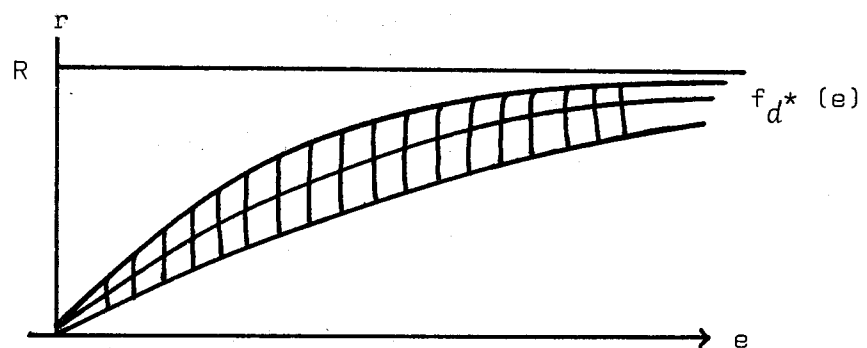
So : the working class is exploited at a rate e (recall : $w(e+1) = 1$) and "chooses" a consumption structure out of the simplex $v \cdot d^* = 1$.

G. Duménil and C. Roy have computed the mapping (25) :

$$r = f_{d^*}(e)$$

./.

The d^* - indexed curves are convex and strictly increasing with the range from 0 to R, as e runs from 0 to infinity (R being the root of Frobenius of the "technical matrix" A : that is the limit of M when the workers "live out of thin air"). The envelope of this family of curves is a set of arcs of peculiar curves : namely, the curves corresponding to peculiar d^* that minimizes and maximises the organic composition evaluated in a specific way.



Another method, more sophisticated, is supplied by J. Roemer [13]. Here, each worker is allowed to choose his bundle of consumption goods, given a social rate of surplus value. Each worker is indeed allotted a choice function γ (accepting neo-classical properties of continuity and convexity). Wage and prices being given in the prices of production system, each one thus "freely" chooses how to spend his income. By combining the theorems of Perron-Frobenius and Brouwer, J. Roemer shows that there exists only one system of relative prices so that workers choose bundles of consumption respecting the value e of the rate of surplus value (26). The correspondance between e and r is now indexed by Γ (the set of all workers choice functions), but the shape of the family of curves $r = f_{\Gamma}(e)$ is the same as in Dumenil.

Yet, the use of Brouwer's Fixed Point Theorem (which gives the result of an algorithm without any economic meaning) sets a fundamental problem. How is it possible for consumers to choose a bundle of goods out of a price-regulated market when their budget constraint is given in the value system (27) ? This problem refers to the highly questionable expedient which is common to all the Morishima-type of solutions to the transformation problem. Namely : the one "transforming V" out of the value of consumption goods. Once again, let us recall that the workers

are paid off with money, and not with a right on a commodity bundle. When the "transformation" is realised, when the choices are expressed in the prices system, and if all the workers choices are alike, the relation $r = f_{d^*}(e)$ is surely true. But it is not obvious that it would correspond to a causal scheme : $(d^*, e) \rightarrow r$. Anyway, in Marx's view, the causal scheme is $(y, e) \rightarrow r$. Up to here, we stick to the same weakness of the admitted solution to the transformation problem.

We shall come back to this point later.

4°) The prices of production and the rate of profit are determined out of the theory of labour-value and exploitation.

Here is the clue of the controversies. So strong as could be the connections (that we have just studied) between the system of values and surplus-values on one hand, and the system of prices and profits on the other hand, these connections, at the first glance, look like "cousinhood bounds" and not "filiation bounds" (the common ancestor being the "technical" data of the coefficients of $A + d \otimes l$).

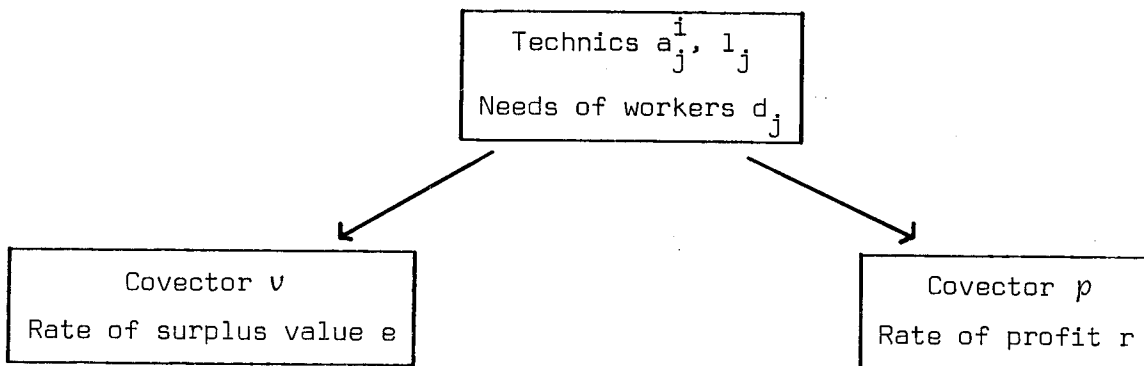


Figure I

As a matter of fact, the matrix M appears to determine a "surplus" (under the "technical" condition of its productiveness), and this net product is to be allotted according to two systems :

- either on the prorata of living labour added during the last period
- either on the prorata of the cost-price.

P.A. Samuelson [15] compares these two systems to the incidence on prices formation of a value added tax on one hand, of a turnover tax on the other hand. In the first case, the resolution of the system of equations is simple enough : it is a system of n linear equations. In the second case, an algebraic equation of degree n is to be solved (28) !

"One might apply, P.A. Samuelson suggests, Marx's theory of the materialist determination of history to arrive at the hypothesis that it was Marx's incapacity in algebra and the absence of a computer that caused him to formulate his exploitation theory in Volume I terms which are unrealistic but which happen to be simpler to handle algebraically than Volume III's Walrasian relations". (29)

Henceforth the "so-called transformation problem" is quite easily solved (on the basis of A , d , ℓ being given)

"The 'transformation algorithm' is precisely of the following form : 'Contemplate two alternative and discordant systems. Write down one. Now transform by taking an eraser and rubbing it out. Then fill in the other one. Voila ! You have completed your transformation algorithm'" (30).

Unfortunately, this happy end of the affair implies that matrix M (out of which, true, p and r are directly deduced) would be logically given *before* the theory of value and exploitation (31). But we have already seen (part I) it was not the case. Let us come back to the logical chain, link after link.

At first, we have the commodity-exchange character of economy. Given the state of productive forces (A , ℓ) one computes the value-covector v . Up to here : not a word about exploitation, nor surplus-value, nor profit, nor production prices, nor wages, nor M (32).

Let us introduce the wage-worker-to-capitalist relation, and the purchase and use of the commodity "labour power", defined by its value w , and the duration λ and intensity ϵ of the working day. These 3 factors co-determine surplus value, hence e . The value of labor power corresponds, through v , which is already computed, to a purchasable bundle of necessary consumption goods. At least, as far as the Morishima-type (and Samuelson-type) of solution for the transformation of w is accepted.

All these terms : λ , ϵ , w , e , d , are directly or indirectly, the goal of struggle relations between social classes, and are connected in a complex way.

- * λ and ϵ are slightly connected, and, much more weakly, connected to d (33). We are allowed to take them for data before the computation of the rate of surplus-value. Anyway, they are implied in the definition of tensor T mapping n -uples of commodity "labour power" into covector "value added". This mapping (which is quantitatively speaking an identity when the units are *properly* chosen) is the obligatory link from the "technical" data (A, ℓ) to the equations of production prices :

$$p = (1+r) (p A + w \ell) \quad (w = \text{rate of wage})$$

This form of the system is indeed an abbreviation for :

$$p = (1+r) (p A + w \ell T^{-1})$$

- * λ and ϵ being given, the connections between e , d and w are far more complex. The *dynamic* process that appears to be directing is of this type :

$$e \rightarrow w \rightarrow d$$

In other words : capitalists and workers face each others ; the bargaining (with or without strikes, riots and so on) settles the ratio e , hence the value w , and workers spend their money on the market.

Yet in the Chapter VI, Volume I, of *Capital*, Marx, in order to give a more obvious meaning for the statement "the labour power, as any commodity, is given a value, namely, the quantity of labour necessary to its reproduction", gives a little strain to the analogy in laying the existence of a standard workers consumption vector, that appears like a kind of input of the firms "households". Let us notice, *en passant*, that the "operative" of this kind of firm (the wife, direct producer) works for no wage, and the "manager" (the husband) offers the output at its cost-price, with no mark-up on the input. Leontieff, Von Neumann and Morishima just codify this representation of the worker as a draught-animal claiming for its peck.

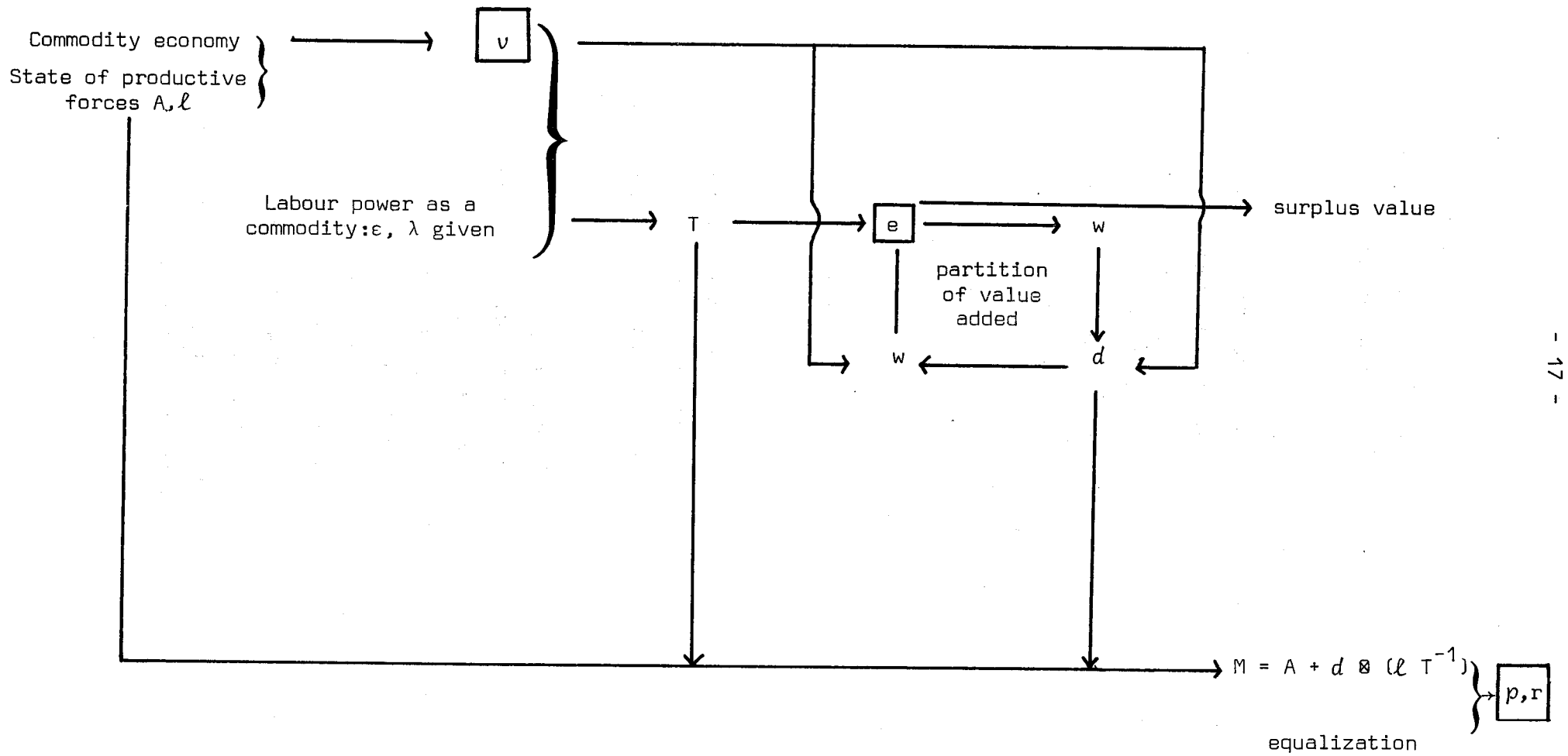
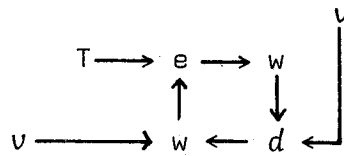


Figure II

In fact, Marx, in the Capital, quickly drops out that physical determination of a "wage-bundle", and turns out to the determination of wage as a quantity of paid labor (34). But the way of recognizing the existence of a "standard consumption-bundle", for one time, in one country, is not an absurdity. Of course, trade-unions would not directly negotiate for the right to a dish-washer or a colour - TV - set : once again, the bargaining applies on wage-rate. Yet, the physical standard of living, once being settled, cannot be lowered without difficulty. Not for moral considerations, but... because it would induce the breakdown of corresponding industries (35) !

So, in a marxist terminology, we could say that e and d are "dialectically connected", d being the "basis" and e being the "directing factor". Hence, the logical chain looks like this :



Now, d being defined, and wage being used to purchase the consumption goods "at their prices of production", we may conclude with the last link of the logical chain, represented in figure II. The comparison with figure I justifies the somehow cautious way we have decorticated the signification of algebric symbolism in the first part of this paper. Even if we accept d as an exogenous data, the theory of value and exploitation turns out to be pre-supposed to the theory of prices of production (at least : through tensor T).

III - A NEW SOLUTION TO THE TRANSFORMATION PROBLEM.

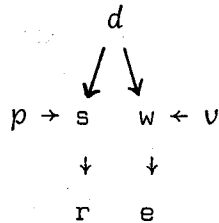
The today commonly admitted solution has turned out to be less paradoxal for an "orthodox marxist" view than usually thought. Yet, it still diverges from Marx's claims.

- * If the theory of value turned out to be actually a pre-requisite for the formalism of computation of prices of production, it is not clear in the algorithm of transformation. One would like "to see" the value being reallocated on outputs according to the mechanism of "equalization". That was the real aim of the two "invariance relations" (Sum of values = ... and so on).
- * If there does exist a connection between the structure of production and the deviation from value to production-prices, it appears "ex-post". In Marx's view, the structure of output y (not of workers' consumption d^*), for a given rate of surplus-value, is to determine the rate of profit through the ponderation of organic compositions of capital in the various sectors.

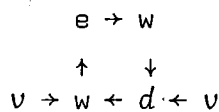
1°) The crux of the matter (36).

In fact, all these divergences between Marx's intuitions and the Morishima-type of solution have their origin in the very way the "transformers" from Von Bortkiewicz resolved the peculiar problem of the *transformation of the value of labour-power*. Their common solution consists in transforming "V" (or here : w) just alike "C". Nobody would deny that, given a technology (A, ℓ) (37), the cost price of constant capital C_j is $\sum_i p_i a_{ji}^1$ (per unit). But is it allowed to reduce the labour power to the output corresponding to an input d and a cost-price $\sum_i p_i d_i^1$? That would be at most an approximation for the economics of a "quasi-esclavagist mode of production", that is to say : esclavagist economy *within* the units of production, and commodity-economy *between* the units of production (for instance : in Dixieland before the Civil War) (38). On the contrary, the workers recover from capital an amount of *money* and choose what they would purchase according to their needs (denoted Γ in J. Roemer). In fact, the "way of life" constraint compels them to purchase a "fuzzy bundle" of consumption goods, and the value of this bundle for a peculiar state of

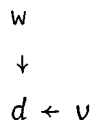
"class struggle" provides a basis to the value of labour power. But it does not follow that one may extract the univoque determination :



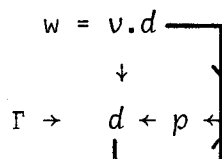
We are rather compelled to formalize this kind of linkage :



with a "loop" $d \longleftrightarrow e$. But the "mediation" :



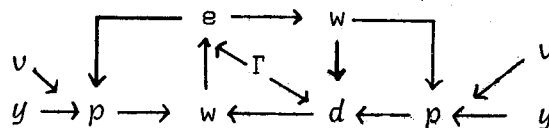
is neither admissible, for the workers are to spend their wages "in the production-price system". The quoted paper from J. Roemer is a better approximation to a solution. His using of Brouwer Fixed Point Theorem is a formalization for this kind of pattern :



But no economic reality corresponds to the mathematical algorithm : the workers should purchase goods "at their prices of production" within a budget constraint ($v.d = w$) defined... in the value system !

The reason for it is that, in J. Roemer, the value of labour power, instead of being defined as the paid share of their added value, ($w = \frac{1}{1+e}$), sticks in fact to the bare value of a commodity bundle, even if the bundle is no more defined ex ante (but it remains presupposed to the mapping $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}''$ upon which the Fixed Point Theorem is applied).

On the contrary, everything is made clear when w is considered as a "quantity of paid labour", a share $\frac{1}{1+e}$ of the added value, to be spent according to socially defined needs Γ (39), on a market regulated by prices of production, that prices being defined by a reallocation of value, and that reallocation *not* depending on d , but, like in Marx, on y . The result of these outlays turns out to be a bundle d (or a family of vectors d for various workers), the value of which may well be different from w , in terms of embodied labor, not in terms of reallocated value. This bundle, if insufficient according to Γ , may henceforth be considered as a basis for a new bargaining of the partition of value added. The logical scheme is then :



This solution, which implies the necessity of dealing in a different way with constant capital C and variable capital V , happens to be conform with Marx's indications upon the way of achieving the transformation properly. Of course, it is not a proof ! But when intending to formalize Marx's thought about the transformation from value to prices of production, one is supposed to check up whether it is the very thought of Marx that is formalized, or the thought of somebody else. And what is Marx's message, after he has himself criticized his clumsy little model of transformation ? He writes that now the elements of cost-price are to be transformed this way :

"In addition to the fact that the price of the product of capital B for instance diverges from its value because the surplus-value embodied in B can be superior or inferior to the profit within the price of product B, the same circumstance occurs also in commodities which constitute both the constant fraction of capital B and, indirectly, as means of subsistence of workers, its variable fraction. As far as the constant fraction is concerned, it is itself equal to the cost of production plus the mean profit (...). As for as the variable fraction is concerned, the mean daily wage is still in fact equal to the value produced during the number of hours the worker works in order to produce its necessary consumption goods. But the divergence between the value and the production prices of these commodities falsifies that number of hours itself". ([11], Volume III, chapter X. Translation from the french edition, to be substituted when the Penguin edition available in Paris !).

In other words, in Marx's thought, as far as constant capital is concerned, we just have to transform the valuation of a physical input. But as far as variable capital is concerned, wage, considered as a share of value added, as a "number of hours", is conserved within the transformation, but the number of hours itself, considered as equivalent to a peculiar bundle of necessary commodities, is transformed ! That is exactly our last scheme.

But we are now to check up the mathematical consistency of the whole story.

2°) The formalisation.

Let v be the value of commodities (v is computed from A and ℓ). Let e be the given rate of surplus value, hence w the value of labour power. We are looking for a reallocation of total value embodied within the period, that is : reallocation of the total flow of abstract labour onto the total output corresponding to this labour, in other words the net output of the period. Henceforth we shall denote y this net output, and Y the gross output ($y = Y - AY$).

This transformation must be really a *reallocation*, that is a reallocation of the same quantity of labour value. Let $\hat{p}_i$ the reallocated value on the unit of good i . The covector $\hat{p}$ defines the system of relative prices (the nominal prices depend on the choice of the *numéraire*). By definition of a "reallocation", if such a system exists, it must verify :

$$(H_1) \quad \hat{p} \cdot y = v \cdot y$$

On the other hand, this reallocation must realize a *capitalist equalization* of surplus value. In other words, the reallocated value $\hat{p}_i$ must be equal to γ times the sum of constant capital (evaluated in reallocated values) and of variable capital (evaluated as the value granted to workers in exchange for the disposition of their labour-power) engaged in production of one unit of i , and γ must be equal in any sector. γ is nothing but $1+r$,

so one expects $\gamma > 1$. Assume as usual that the unit of value and the unit of labour power are such that the tensor T may remain implicit. Then, by definition of capitalist equalization, if the system $\hat{p}$ exists, it must verify :

$$(H_2) \quad \hat{p} = \gamma (\hat{p}A + w \ell)$$

This condition can be expressed in another way. We want the "commended labour" (40), direct (during the last period, indexed as 0) or indirect (during the former periods indexed n), to contribute in the reallocated value $\hat{p}_i$ of the output i according to the proportion γ^{n+1} (41) :

$$(H'_2) \quad \hat{p} = w \sum_0^{\infty} \gamma^{n+1} \ell A^n$$

(H'_2) is equivalent to (H_2) which may indeed be written this way :

$$(H''_2) \quad \hat{p} = w \ell \left[\frac{I}{\gamma} - A \right]^{-1}$$

and that formulation can be expressed as (H'_2) by Taylor's expansion of the inverse matrix (42).

Notice that the same operation can be applied to :

$$v = (1+e) w \ell (I-A)^{-1}$$

$$\text{Thus } v = (1+e) w \left(\sum_0^{\infty} \ell A^n \right)$$

Now we understand clearly that the reallocation consists in a redistribution of *the whole value* (43) so that the total embodied surplus-value is allotted, not on the prorata of commended labor during each past period, but on the prorata of all the past labours weighted by γ^{n+1} .

P.A. Samuelson's comparison with value-added-tax and turnover-tax is good but insufficient, for the "turnover" is useless. Let us assume that a spinning factory buy a weaving factory. The spinners' labour, which was discounted as constant capital for the weaving firm, is now discounted as variable capital... but is tied up during two periods. That fact is correctly taken into account in formulation (H'_2) .

The system of reallocated value which we are looking for (and out of which any system of prices of production can be deduced by the choice of a numéraire) is thus well defined by (H_1) and (H_2) . Now the question (Marx's question) is : does such a system exist, and what are its properties ? It

will be quite easy to prove the following theorem, summing up all the classical marxian properties.

Theorem of marxian equalization.

1. For any structure of output, there exists one and only one capitalist reallocation of value.
2. If the numeraire is such that the sum of values is equal to the sum of prices for the social net output, then the sum of surplus-values is equal to the sum of profits.
3. The rate of profit is a function of the rate of surplus value, of the technical composition of capital in various sectors, and of the allocation of social labor into the sectors, thus of the structure of the output.

Proof.

1. We are to demonstrate :

$$\forall y \exists (\hat{p}, \gamma) : \begin{cases} \hat{p} \cdot y = v \cdot y & (H_1) \\ \hat{p} = \gamma (\hat{p} A + w l) & (H_2) \end{cases}$$

Let us use (H_2) under the form (H'_2) . Then $\hat{p}$ is a continuous increasing function of γ , and, thus, so is $\hat{p} \cdot y$ (recall y is a non-negative vector).

$$\text{When } \gamma = 1, \quad \text{then : } \hat{p} \cdot y = \frac{1}{1+\epsilon} v \cdot y < v \cdot y$$

When γ tends to the ray of convergence of the series in (H'_2) , then $\hat{p} \cdot y$ tends to infinity.

So there is one and only one value for γ , and one and only one covector $\hat{p}$, so that (H_1) holds. That value of γ being more than 1, let it be denoted $\gamma = 1+r$, r being the positive rate of profit (44).

2. Let y be the net output in which the added value is embodied, and Y the corresponding gross output. By definition :

$$\hat{p} \cdot y = v \cdot y \quad \text{and} \quad Y - A Y = y$$

$$\begin{aligned}
 \text{Then : } \quad \text{sum of profits} &= \hat{p} \cdot y - w \ell \cdot y \\
 &= v \cdot (Y - AY) - w \ell \cdot y \\
 &= e w \ell \cdot y \\
 &= \text{sum of surplus value}
 \end{aligned}$$

$$3. \quad r = \frac{\text{sum of profits}}{\text{engaged capital}} = \frac{e w \ell \cdot y}{(\hat{p} A + w \ell) y} = \frac{e}{\frac{\hat{p} A y}{w \ell \cdot y} + 1}$$

Now let us write :

$$\frac{\hat{p} A y}{w \ell \cdot y} = \sum_j \frac{\hat{p} A_j}{w \ell_j} \cdot \frac{\ell_j y_j}{\ell \cdot y}$$

That is the barycentric mean of the organic compositions of capital in various sectors, evaluated in prices of production (45) and weighted by the share of total social labour allocated to sectors. These organic compositions depend only upon the technical composition of the sectors in one hand, and covector $\hat{p}$ on the other hand. But that one depends itself on e , y , and on (A, ℓ) . So r depends only on e , y , and (A, ℓ) .

Q.E.D.

The last formulation for r is not very suitable, but is the nearest to Marx's formula (the author himself recognized it to be a proxy (46)).

Now let us compute the direct formula, *à la* Duménil-Roy.

Let us start with : $\hat{p} \cdot y = v \cdot y$

Using the (H_2'') formulation and $w(1+e) = 1$:

$$w \ell \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y = (1+e) w v \cdot y$$

$$\text{hence : } \quad e = \frac{\ell}{v \cdot y} \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y - 1$$

./.

That depends only on the structure of y . So let us denote y^* the vector of same direction, so that : $v.y^* = 1$.

$$\text{Then :} \quad e = \ell \left[\frac{I}{1+r} - A \right]^{-1} y^* - v.y^*$$

$$\text{But :} \quad \ell = v (I-A), \text{ so :}$$

$$\begin{aligned} e &= v [(I-A) \left(\frac{I}{1+r} - A \right)^{-1} - I] y^* \\ &= v \left[\left(\frac{r}{1+r} I + \frac{I}{1+r} - A \right) \left(\frac{I}{1+r} - A \right)^{-1} - I \right] y^* \end{aligned}$$

$$\text{Finally :} \quad e = r v [I - (1+r) A]^{-1} y^*$$

That is a continuous increasing function of r . So we have a function :

$$r = f_{y^*}(e)$$

This function is formally the same as in the second part, with y^* in place of d^* . So, in the same way, the corresponding curves are increasing, convex, admit an asymptotic limit $r \rightarrow R$, and a finite slope at the origin (47). The envelope of the family of curves is composed of arcs of peculiar curves (the ones corresponding to the y_j^* maximizing and minimizing the organic composition at a given r). The reader can report himself to the figure in the Second Part, third paragraph.

III - COMPARISON BETWEEN THE TWO SOLUTIONS.

With the "new" solution to the transformation problem (let us call it henceforth the "solution B") we have obtained all the results that Marx was awaiting from his transformation from value to prices of production. Thus could the results provided by the Morishima-type of solution (let us call it henceforth "solution A") be false ones ? Of course not : they are correct, mathematically speaking, and, economically, they fit with the marxian theory of value and exploitation. And if, when the transformation is performed according to solution B, the workers are enough sheep minded to choose the same consumption bundle d , then the results obtained through solution A are exactly true. Yet they look different from those of solution B !

In fact, there is no contradiction, not even a "dialectical" one. The point is just that neither e nor w have the same meaning nor measure in the two solutions, though they are index numbers of the same reality.

In solution A, w_A is the labour value of the goods purchased by workers :

$$w_A = v.d$$

In solution B, w_B is the share of their value added that they recover and are allowed to spend against commodities according to reallocated values :

$$w_B = \frac{1}{1+e_B}$$

There is no reason that $w_A = w_B$, $e_A = e_B$. In the more general case, the embodied value within the goods purchased by wages is not the share of added value reassigned to workers in exchange of their labour power :

$$w_A = v.d \neq w_B = \frac{1}{1+e_B}$$

When the transformation is performed according to solution B, for a given y , does it exist a peculiar structure $\hat{d}^*$ of worker's consumption so that $w_B = v.\hat{d}^*$? The answer is obvious, through the Second Part of this paper : it is the structure of consumption d^* so that y turns out to be on the integral accumulation model $\hat{y}(\hat{d}^*)$. In any other situation, the two solutions are separately valid, with $e_A \neq e_B$. Since the two solutions must deliver the

same rate of profit r , e_A and e_B are thus connected :

$$e_A = (f_{d^*}^{-1} \circ f_{y^*}) (e_B)$$

All these results are summed up in the synoptic table.

The solution B being closer both to the intuitions and to the text of Marx, is the solution A, fruit of a long-range amount of serious works, to be surrendered to the museum of curiosities of the history of economic thought ? Not at all, in my opinion. Because it has compelled us to explore carefully (as I tried to do in my Second Part) the economic conceptual context of the transformation : namely, all the problems connected with the "realisability" of the pair (y, d) . On the contrary, the "new" solution (in fact, the corrected Marx's one), just because of its simplicity, does not even take into account the necessity for y to be "realized", to be in accordance with some balanced model of accumulation. All that we are winning by expressing directly $r = f_{y^*} (e)$ is compensated by the apparently total undetermination of y^* .

Let us take an example (48). Let w_B be the share of value added recovered by workers. With it, they hasten to purchase the necessary goods and, if possible, some superfluities. But here happens a surprising phenomenon : the production is reoriented (y changes), thus the system of production prices deviates, and the boundary of purchasable bundles of consumption goods changes ! So, for the same rate of exploitation e_B , the same value of labour force w_B , the workers could afford either the necessities plus some superfluities, or not even the necessities, depending on the general orientation of production ! That does not fit well with marxist common sense...

In the solution A, we have on the other hand the following statement : "given w_A the value of labour power, the rate of profit varies according to orientation of workers consumption d^* ". It is a less shocking statement, in my opinion (49). It is just a transformed and enreached form, within the transformation, of the Volume I theory of "relative surplus value". Marx denotes with that last concept the variation of the rate of surplus value connected with the variation of the value of the bundle d , following the variations in industrial productivity. Now let us assume a change in technology so that the value of d remains the same, but the technical composition

SYNOPTIC TABLE

Solution A

Solution B

v = value = embodied labour
(theory of value)
 e = partition of value added
(theory of exploitation)

This partition e_A is defined by embodied labour in workers' consumption bundle d .

$$w_A = v \cdot d \quad \text{defined a priori}$$

This partition e_B is defined a priori, and workers use their share in purchasing commodities at reallocated value p

$v \cdot d$ defined after the transformation.

r and p unique

when :

d is given

$$r = f_{d^*}(e_A)$$

r varies according to d^*

r does not vary according to the structure of total output

y is given

$$r = f_{y^*}(e_B)$$

r varies according to y^*

r does not vary according to the structure of workers' consumption

Let us choose the *numéraire*
so that

$$\Sigma \text{ prices} = \Sigma \text{ values}$$

$\Sigma \text{ profits} \neq \Sigma \text{ surplus values}$
(except for $y = \hat{y}(d^*)$)

but :

$\Sigma \text{ values of uses of profit} =$
 $\Sigma \text{ surplus-values}$

$\Sigma \text{ wages} \neq \Sigma \text{ values of consumption goods}$
(except for $d = \hat{d}(y^*)$)

but :

$\Sigma \text{ profits} = \Sigma \text{ surplus values}$

of industries of consumption goods is modified in a more capitalistic way. There is no relative surplus-value, yet it is intuitive that the general rate of profit must vary (and be very likely lower). That result is made explicit in solution A by the statement "for a fixed value of labour-power the rate of profit depends on the choice of d^* , directed to more or less capitalistic industries" (50).

In post-war capitalism, characterised by a tight connection between labour-to-capital substitution in one hand, and extension of the "consumption society" to the working class on the other hand, all that for reasons of "realisability" of growing productivity (phenomenon that Antonio Gramsci denoted by "fordism"), the structures of y and d are closely connected by complex dynamical processes (51). Here is the reign of the referred dialectics :

$$\begin{array}{ccc} e & \rightarrow & w \\ \uparrow & & \downarrow \\ w & \leftarrow & d \end{array}$$

In such conditions, one must be able to work alternatively with solutions A and B.

But here we enter the domain of capitalism dynamics. Here are set the far more serious problems of the contradictory tendencies of the rate of profit, of overproduction crisis, of inflation... Vital problems which Marx and his main successors have preferred to study in priority, even though overlooking the rather technical problem that P.A. Samuelson may be right, after all, to denote "the so-called transformation problem".

A. LIPIETZ

CEPREMAP

March 1979

FOOTNOTES

- 1) In 1899 already (!), Antonio Labriola had to reply this kind of attempt (See his "About the crisis of marxism" [9]).
- 2) See his Marx's economics [12]. I am not at all cancelling the memory of the works of Medio, Meek, Okishio, Seton, Sweezy, Roubine, Winternitz, etc... I have just choosen a well-known reference quite typical of the refered type of solution. For a survey of the problem, from Marx to Von Bortkiewicz, see Dostaler [5], and from von Bortkiewicz up to now, see P.A. Samuelson [16] and Benetti-Cartelier [3].
- 3) See [16], p.422.
- 4) I think in particular of Salama [15] and Yaffé [17] as representing the first attitude. For the second one I refer to C. Benetti and J. Cartelier [3].
- 5) The foundations of this solution were recently laid by G. Duménil [8]. I am very debtfull to conversations with this author, though my arguing is rather different.
- 6) The following extremely short summary raises many problems which are discussed (referring to Marx's text) in my book [10]. Here it is just a matter of cross-examining the signifiance of the formalism used about the "transformation problem".
- 7) Vectors y (resp. : linear forms or covectors v) will be denoted by italic letters, or by column-matrix of roman coefficients, on the right side of operations (resp. : by row-matrix on the left side).
- 8) By "standard productive operation", one understands the normal operation of production according to norms defined by the state of productive forces. It is characterised by a technique, of which are given the quantities of means of production required, and the time needed for its operation. See M. Aglietta [1], A. Lipietz [10].
- 9) Notice that v and ℓ are consubstantial : abstract labour, not commodities (they are covectors). Once v is computed, one ought to "renormalize" the matrix A by choosing for units of goods the quantities of value one. Whatever may be the unit of value, the coefficients of A are henceforth pure scalars (not quantities of i by unit of j).

- 10) I think of C. Benetti, J. Cartelier, J. Fradin. See for instance C. Benetti, "The genesis of the theory of the reproduction - circulation of value", [4], § 24.
- 11) See Lipietz [10].
- 12) See Duménil [6].
- 13) See Marx [11], Volume I, chapter X.
- 14) Let m be the n -uple m_j , m_j being the quantity of man-power which must be purchased in order to produce one unit of j . Obviously this n -uple is a linear form on vectors y . A 1-covariant 1-contravariant tensor maps it into the covector ℓ .

The difference between ℓ and m is both qualitative (it is not the same linear form) and generally quantitative (it is obvious when m_j is to be measured by "workers-days", and ℓ_j by embodied hours). If we want to explicit the tensor T , it will be denoted in matrix notation $T = \epsilon \lambda I$ (I being the unity matrix). If ϵ and λ are not equal in various industries, then we could define ϵ_i , λ_i , and $T_j^i = \epsilon_i \lambda_i \delta_j^i$. Note that the same remark could be done about w . If this fact were to be taken into account, e would become a "tensor of exploitation".

This sophistication would be of no interest. Of course, as K. Marx recognizes it quite willingly, there exists differences in the rate of exploitation, and Engels notes that these differences are likely to be greater than the differences in the rate of profit, for the "equalizing forces are stronger here than there" (see [10], p.268). But :

* First, it is not the point. The crux in the "transformation problem" is that, within the pure theory of value, the rate of profit and the rate of surplus-value could not be both homogenous, when the compositions of capital are different in various sectors. Yet, the "homogeneity" of these two rates is implied by the level of abstraction which is ours : all the members of one class are equal, in front of the other class (so the rate of exploitation is homogenous) and in front of the other members of their own class (so the rates of wage and of profit are homogenous).

* Now, if we want a better conceptualisation of concrete reality, we may take into accounts heterogeneities. But why privilege sectorial heterogeneities? In fact, as far as the conditions of exploitation are non-homogenous, the differences lay mainly on sex, race, region, and so on.

- 15) The crux of criticisms from C. Benetti and J. Cartelier to the solution of the Morishima-type turns around this idea. But, instead of expliciting the existence of this tensor, these authors just refuse to face the problem of the connection between value and relative prices of commodities. Yet, once things are made clear, one may use the "commandable labour" (here : $w m$) as an index for "embodied labour" (ℓ). That is what Marx does all along Volume III (see footnote 40).
- 16) See [11], tome VI, p.191, in French Editions Sociales (provisory quotation).
- 17) Ibidem, p.196.
- 18) On the introduction of fixed capital, see [12] and many others... In the same way, we shall assume in this text that the matrix M is indecomposable, and so on.
- 19) On all that, see Marx [11], Volume III, chapter IX, in particular p.177 sq. (in french edition).
- 20) See Nikaïdo [13].
- 21) Without any assumption about the structure of accumulation, the only constraint is the total realization of output. But capitalists can choose any improductive consumption bundle C , in a n -multiplicity. The inversion of matrix M provides no lowering of the dimension of the multiplicity of corresponding gross output y .
- 22) See [12] and [16]. We shall refer later to a much more interesting result.
- 23) See [13].
- 24) The direction of p being elsewhere fixed, the "normalization" consists in choosing a numéraire so that $\tilde{p} \cdot \hat{y} = v \cdot \hat{y}$. The divergence from v to $\tilde{p}$ thus depends only on d (for A , ℓ given). On the contrary, the "normalization" of y consists just in selecting the direction $\hat{y}$. Of course, one can completely normalize by choosing also the norm of $\hat{y}$.

d.

- 25) Using : $p = (1+r) [p A + p.d \ell]$
 and : $v = \ell [I-A]^{-1}$

G. Duménil and C. Roy compute :

$$e = r v [I - (1+r) A]^{-1} d^*$$

(I shall explicit the computation, for another context, in the third part). d^* being element of the simplex of vertices d_i^* ($(d_i^*)^j = \delta_i^j$), and, for a given value of r , e being the value of a linear form on d^* , then e is within the interval of extreme values of $f_{d^*}^{-1}(r)$. Thus it is sufficient to draw the peculiar curves corresponding to vertices in order to get the enveloppe of all the family of curves (these peculiar curves happen to intersect).

G. Duménil exhibits another more "classical" expression for f . Let $\bar{y}$ be the vector of activities whose net output is d (namely : $\bar{y} = (I-A)^{-1} d$).

Then : $r = e \left[\frac{p A \bar{y}}{p.d \ell.\bar{y}} + 1 \right]^{-1}$

That is the classical marxian formula $r = \frac{e}{q+1}$ (q being the weighted mean of organic compositions), but the organic compositions are valued at prices of production, and the aggregation is applied with the peculiar $\bar{y}$. This non-obvious result allows us to explicit which curves are to compose the enveloppe for a given r .

- 26) Here are the main lines of J. Roemer's proof. For a total consumption vector $\mathcal{D}$, satisfying the constraint on e , corresponds a covector of prices p according to the Perron-Frobenius Theorem (daily wage is chosen as *numéraire*). For this covector p corresponds a total consumption $\mathcal{D}'$ (by the choice functions). That one can be reduced by similarity to $\mathcal{D}''$ satisfying the constraint on e . The mapping $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}''$ is continuous on a compact convex. From the Fixed Point Theorem (see [13]), there exists $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}$.
- 27) The interesting point of J. Roemer's formalisation is that the result of class-struggle is summarized by the data e , not d . But, as Roemer himself recognizes :

"it may be argued that one should wish the social rate of exploitation to emerge simultaneously with the price-commodity bundle configuration : that is, the "class struggle" over exploitation does not take place in an abstract world,

but is mediated through the process of exchange as well as at the point of production. This is a reasonable position, and consequently I do not wish to overstate the case for the model presented here as the final solution". [14], p.40.

28) Namely : $\det [\lambda I - M] = 0$

29) [16], p.418.

30) [16], p.400

31) The idea that the "natural" or "technical" productiveness of matrix M is at the origin of surplus or profit is an old story, that Marx had already to criticize, against the post-Ricardians such as J.S. Mill.

"Favourable natural conditions can provide in themselves only the possibility, never the reality of surplus labour, nor, accordingly, the reality of surplus-value and a surplus product. These conditions affect surplus labour only as natural limits, i.e. by determining the point at which labour for others can begin. In proportion as industry advances these natural limits recede. In the midst of our Western European society, where the worker can only purchase the right to work for his own existence by performing surplus labour for others, it is very easy to imagine that it is an inherent quality of human labour to furnish a surplus product. But consider, for example, an inhabitant of the islands of the East Indies, where sago grows wild in the forests. (...) [The Sago is a tree, that can be cut off and eaten like bread]. Suppose now that an East Indian bread-cutter of this kind requires 12 working hours a week for the satisfaction of all his needs. Nature's direct gift to him is plenty of leisure time. Before he can apply this leisure time productively for himself, a whole series of historical circumstances is required ; before he spends it in surplus labour for others, compulsion is necessary. If capitalist production were introduced, the good fellow would perhaps have to work six days a week, in order to appropriate to himself the product of one working day. In that case, the bounty of nature would not explain why he now has to work six days a week, or why he must provide five days of surplus labour. It explains only why his necessary labour-time would be limited to one day a week. But in no case would his surplus product arise from some innate, occult quality of human labour" ([11], Vol. I, chap. XVI, p.650).

32) Recall that ℓ denotes the quantities of labour time necessary in standard productive operations. But these quantities may require ℓ , 2ℓ , 3ℓ days of waged work, according to ϵ and λ !

- 33) It is admitted that production lowers by 1 per cent when duration of labour lowers by 2 per cent. On the other hand, at the time of C. Dickens or even J. London, the intensity of labour could suffer out of the bad physical conditions of workers. But, at least in western industrial countries, *that is past time* !
- 34) P.A. Samuelson recognizes this quite willingly ([15], p.422). Thus it is astonishing that he accepts the solution of F. Seton (which applies on a physical bundle) as a good solution to Marx's transformation problem.
- 35) That is a decisive remark to understand the inflationist form of present crisis. See [1], [2], [10].
- 36) The main credit of the discovery of this solution is due to G. Duménil who made clear [7] the two fundamental conditions :
- (i) to define w as a share of value added ;
 - (ii) to apply the transformation onto the net product.
- His way of arguing lays on a deep understanding of Marx's approach in the *Capital* (see his book [5]). Yet I take upon myself the exposition in this paragraph, fitting better to my own approach [10], and the necessity and demonstration of the next paragraph.
- 37) Of course, the least costly technique could depend on e and r - and, worse, a technique could be less costly in value and more costly in prices than another. But here we are not dealing with dynamics.
- 38) At any stake, the commodity "labour power" could not be identified (as in P.A. Samuelson) with the "output of sector O", for, in the "firms" of this industry, the labour (the wife's labour) would be unpaid, and the "boss" would sell the output without marking-up the profit. Things would be different if workers would live in capitalist boarding houses, but then the price of labour-power would be $p_o = (1+r) (p.d + p_o l_o)$, l_o denoting the labour of the staff of the boarding house.
- 39) The "choice functions" are surely not, as in Roemer, of the neo-classical type. They are rather of the lexicographical type : first one chooses the necessities, then more and more superfluities (the ordering of necessities and superfluities being socially defined).

- 40) The "commended" or "commendable" labour is a bastard concept of Classical Economics (A. Smith, D. Ricardo), which K. Marx uses again explicitly in Theories of surplus-value and implicitly in Volume III of *Capital*. It denotes the value or the price of purchased manpower, when used as index of delivered labour. In other words, it is variable capital V as far as it may be used as index number for the quantity of value added $V+PL$ (w and T being implied). For instance, when Marx denotes C/V the composition of capital in Volume III, he outlines that here V is used as index for embodied labour. But many authors, who did not notice that, are puzzled : they cannot understand how the increasing of C/V could imply the fall of the rate of profit. Yet, once Marx's words are understood (namely, that the "growth of organic composition" is in fact the growth of $\frac{C}{V+PL}$), it becomes obvious that the rate of profit tends towards 0 uniformly (that is : whatever could be the evolution of $e = PL/V$) with the growth of organic composition of capital. (On this little trap, see [10]).
- 41) The quantity of labour directly embodied in j is l_j ; the quantity of direct labour embodied in the means of production of j is ℓA_j ; in the means of production of these means of production : $\ell [A^2]_j$ and so on... T being the unity tensor, one gets the "commended labour" in multiplying by w .
- 42) The series in H'_2 converge towards the inverse matrix when $\gamma < 1+R$, $\frac{1}{1+R}$ being the root of Frobenius of matrix A . That condition holds, as it will turn out, when workers have a non-zero consumption, matrix A being itself productive (see [13]).
- 43) This infinite regressive splitting of the "constant capital" value between past "variable capital" and past surplus value (or : of the price of the means of production, between wages and profit) has already been performed by Adam Smith. We must assume a fictive genealogy, with constant norms of production in the past. Since we are splitting the value of the *net* product, the sums of "variable capital" and "surplus-value" resulting of the splitting are equivalent to the respective shares of workers and capitalists within the value added in the period.

- 44) So $r > 0$ iff $w < 1$ or $e > 0$. It is the result of the "fundamental marxian theorem", in the new context.
- 45) Of course, these "technical" coefficients a_j^1 and l_j are the expression of social relations : division of labour, taylorism, fordism, and so on. By "technical", I only mean that the coefficients are given "before" the conditions of extortion of surplus value (w, λ, e), and in particular are independent of d . So I intend to outline the difference with the Morishima-type of solution.
- 46) In Marx's proxy, where $r = \frac{\sum PL_1}{\sum(C_1 + V_1)}$, the organic compositions are estimated in value. *That is the only consequence of Marx's proxy.*
- 47) By expanding in series the computed expression of $e = f_{y^*}^{-1}(r)$, it becomes obvious that : $\forall r, \frac{d e}{d r} > 0, \frac{d^2 e}{d r^2} > 0$, and $r \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{e}{r} \rightarrow v (I-A)^{-1} y^*$.
- 48) Here is another one, that I shall not develop, because it implies the matrix M to be decomposable, and this would make the paper still longer. It is well known by practitioners of solution A that, if there exists non-fundamental sectors, the rate of profit is determined by the sub-section of economy of fundamental goods. That result looks shocking for many marxists : the general rate of profit would not be influenced by the surplus-value produced in the "section III" (the section of non-fundamental industries). The intuition underlying to their criticism is that, assuming a weak composition of capital in section III, it would be sufficient to increase the share of social labour allotted to this section in order to increase the general rate of profit. That intuition holds on the apparently total undetermination of vector y in solution B. But that is a misleading appearance. The output of non-fundamental sectors is to be realized, and, except for the auto-consumption by capitalists of this section, it is purchased by profits from the other sections. Thus, the non-fundamental component y_{NF} of y is a function of the components $\hat{y}_F$ and $\tilde{y}_F$ (defined in Part Two). When taking these constraints into account, one rediscovers the results of solution A. Yet that solution directly exhibits the result : "once given the workers consumption bundle d , for any *realized* output (that is : produced *and* purchased), the rate of profit is constant". And it is a pretty result...

- 49) Quite a subjective opinion, of course. For G. Duménil, it was such an unacceptable result that it led him to discard the solution A and approach the solution B.
- 50) Here I seem mixing dynamics and comparative statics. But it can be assumed that there are two substitutable consumption goods of same value but with quite different technical coefficients. The "choice" from one to the other good by the working class will have the same effect on the rate of profit as a change in technology.
- 51) These processes are the main characters of what I call "the monopolistic regulation of intensive accumulation". [10].

REFERENCES

- [1] M. AGLIETTA ; A theory of capitalist regulation. The U.S. Experience.
New Left Books, London-New York, 1979.
- [2] J.P. BENASSY, R. BOYER, R.M. GELPI, A. LIPIETZ, J. MISTRAL, J. MUNOZ,
C. OMINAMI ; Approches de l'inflation : l'exemple français,
Publication CEPREMAP, Paris, 1977.
- [3] C. BENETTI, C. BERTHOMIEU, J. CARTELIER, Economie classique, Economie
vulgaire, P.U.G. -Maspéro, Grenoble, 1975.
- [4] C. BENETTI et ALII, Marx et l'économie politique. Essais sur les
"Théories de la plus-value", PUG-Maspéro, Grenoble 1977.
- [5] G. DOSTALER, Valeur et Prix. Histoire d'un débat, P.U.G. -Maspéro -
Presses de l'Université de Québec, Montréal, 1978.
- [6] G. DUMENIL, Le concept de loi économique dans "Le Capital", F. Maspéro,
Paris, 1978.
- [7] G. DUMENIL, C. ROY, "Pour une approche fonctionnelle du théorème marxien
fondamental d'Okishio-Morishima", to be published, Paris,
August 1978.
- [8] G. DUMESNIL, La Transformation, to be published, Paris, October 1978.
- [9] A. LABRIOLA, Essais sur la conception matérialiste de l'histoire, Gordon
and Breach, London-Paris, 1970.
- [10] A. LIPIETZ, Crise et inflation : Pourquoi ?, F. Maspéro, 1979.
- [11] K. MARX, The Capital, Penguin - New Left Review, London, 1976.
- [12] M. MORISHIMA, Marx's economics. A dual theory of value and growth,
Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

- [13] H. NIKAIDO, Introduction to sets and mapping in modern economics, North Holland-American Elsevier, Amsterdam - New York, 1970.
- [14] J. ROEMER, "Marxian models of reproduction and accumulation", Cambridge Journal of Economics, 1978, 2, p.37-53, Academic Press, London.
- [15] P. SALAMA, Sur la valeur. Eléments pour une critique, F. Maspéro, Paris, 1975.
- [16] P.A. SAMUELSON, "Understanding the Marxian Notion of Exploitation : A summary of the So-Called Transformation Problem between Marxian Values and Competitive Prices", Journal of Economic Litterature. June 1971, IX, p.399-431.
- [17] D. YAFFE, "Valeur et prix de production dans "Le Capital" de Marx", Critiques de l'Economie Politique, n°20, April-June 1975, F. Maspéro.

-:-:-:-