



ESTIMATION DE MODELES  
AVEC RELATIONS COMPTABLES  
MODELES EQUIVALENTS

C. FOURGEAUD - B. LENCLUD

MARS 1978

N° 7803

## ESTIMATION DE MODELES COMPORTANT DES RELATIONS COMPTABLES

## MODELES EQUIVALENTS

.....

C. FOURGEAUD - B. LENCLUD

INTRODUCTION :

Cette étude a pour objet d'examiner sur le plan théorique quelques difficultés que l'on rencontre dans l'estimation de modèles qui comportent des relations comptables entre les variables endogènes.

L'existence de ces relations impliquant la singularité de la matrice des variances-covariances des erreurs, les méthodes classiques d'estimation ne sont pas directement applicables. Même si l'on ne considère que la forme réduite, il faut utiliser un théorème général de Gauss-Markov et le plus souvent on ne doit pas estimer séparément chacune des relations.

On peut alors s'interroger sur les conditions qui permettent de réduire le modèle à un modèle régulier (obtenu par exemple en supprimant des équations) et même d'appliquer les moindres carrés ordinaires.

Ce problème se place dans un cadre plus général, celui de l'équivalence de modèles. On donne alors des conditions nécessaires et suffisantes permettant de répondre aux questions précédentes.

Cet article comporte trois parties. La première présente sans démonstration plusieurs formes du théorème de Gauss-Markov utiles par la suite et donne des CNS d'équivalence de modèles. La seconde traite de la réduction des modèles, la troisième de l'efficacité des moindres carrés ordinaires. Comme on peut le constater cet article unifie des propriétés déjà mises en évidence dans des études antérieures.

## I - RAPPELS :

### I.1 THEOREME GENERAL DE GAUSS-MARKOV [3],[4],[5],[8],[9],[10]

Soit le modèle  $(Y, Xa, L a = 1, \sigma^2 \Omega)$  et  $A = MY + N$  un estimateur linéaire affine de  $a$  ( $\Omega$  connue,  $M$  et  $N$  non aléatoires). Posons

$$V = I - L^+L$$

Pour diverses formulations du théorème on est conduit à comparer les programmes suivants : ( $\|A\|^2 = \text{trace } AA'$ ).

$$\begin{array}{l|l} P_V & \begin{array}{l} \text{Min trace } M \Omega M' \\ M \in E = \{M / \|MXV - V\| \text{ Min}\} \text{ et } N = (I - MX) L^+1 \end{array} \\ \\ P_D & \begin{array}{l} \text{Min } t' M \Omega M' t \quad \forall t \\ M \in E = \{M / \|MXV - V\| \text{ Min}\} \text{ et } N = (I - MX) L^+1 \end{array} \\ \\ P^- & \begin{array}{l} \text{Min } e' \Omega^- e \\ \Omega \Omega^- e = e \iff v(e) \subset v(\Omega) \\ e = y - Xa \\ L a = 1 \end{array} \end{array}$$

-----  
 $A^+$  désigne le pseudo-inverse de Penrose de  $A$ ,  $A^-$  une g-inverse ( $AA^-A = A$ ) et  $v(A)$  l'image de  $A$ .

./.

$P_V$  définit des estimateurs de variance minimale dans la classe des estimateurs de biais minimum. (Sans biais si  $MXV = V$ ).

$P_D$  définit des estimateurs de dispersion minimale dans la même classe.

$P^-$  est un programme de moindres carrés généralisés.

On a les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

Les solutions de  $P_V$  et  $P_D$  coïncident. Elles s'écrivent :

$$M_0 = (XV)^+ (I - \Omega(C \Omega C)^+) + H(C - C \Omega(C \Omega C)^+)$$

avec  $V = I - L^+ L$  et  $C = I - XV(XV)^+$

où  $H$  est arbitraire.

Propriété 2 :

Soit le modèle  $(Y, X, a, La = l, \sigma^2 \Omega)$   $\Omega$  connue

1°) Soit  $A_0 = M_0 Y + N_0$  avec  $M_0 = (XV)^+ (I - \Omega(C \Omega C)^+)$  et

$$N_0 = (I - M_0 X) L^+ l$$

a)  $A_0$  est l'unique estimateur de variance minimale de  $a$  dans la classe des estimateurs de biais minimum (sans biais si  $(XV)^+ XV = V$ ).

$$b) \text{Var}(A_0) = \sigma^2 (XV)^+ \Omega (\Omega^+ - (C \Omega C)^+) \Omega (XV)^+$$

c) Soit  $G$  une matrice  $(T, T - s)$  de rang  $(T - s)$  dont les colonnes sont des vecteurs propres orthogonaux et normés ( $G'G = I, G^+ = G'$ ) de  $\Omega$  correspondant aux valeurs propres nulles de  $\Omega$ .

Alors  $G' Y = G' X A_0 = G' X a$  avec probabilité 1.

2°) Soit  $\hat{U} = Y - X A_0$  et  $\Omega^-$  une g-inverse de  $\Omega$  alors

$$E(\hat{U}' \Omega^- \hat{U}) = \sigma^2 \text{Rg}(C \Omega C)^+ \Omega$$

Propriété 3 :

-  $P^-$  a des solutions ssi

$$\left| \begin{array}{l} LL^+ 1 = 1 \\ G' X(GXV)^+ G' (y - XL^+ 1) = G' (y - XL^+ 1) \iff \begin{array}{l} 1 \in v(L) \\ v[G' (y - XL^+ 1)] \subset v[G' XV] \end{array} \end{array} \right.$$

- la solution  $a_0$  de  $P^-$  est unique et indépendante du choix du g-inverse  $\Omega^-$  de  $\Omega$ .

$$\text{Soit } a_0 = (XV)^+ (I - (C \Omega C)^+) y + (I - (XV)^+ X) L^+ 1$$

$a_0$  est la solution unique si  $X$  est de plein rang, de norme minimum sinon, de  $P^-$ .

REMARQUES :

1°) Dans la littérature économétrique le programme  $P^-$  est présenté avec différents choix de  $\Omega^-$  :  $(\Omega + GG')^{-1}$  (Malinvaud),  $\Omega^+$  (Theil), les estimateurs correspondants bien que d'une forme différente sont en réalité identiques.

2°) Lorsque la matrice  $\Omega$  est singulière, c'est-à-dire qu'il existe une matrice "propre"  $G$  telle que  $\Omega G = 0$ , cette singularité induit une contrainte sur les paramètres

$$G' Y = G' X a$$

Cette contrainte n'a pas à être introduite dans le programme définissant l'estimateur optimal  $A_0$  (sauf évidemment dans le programme  $P^-$ ) ; elle se trouvera automatiquement vérifiée.

3°) Soit le modèle  $(Y, X a, L a = 1, \sigma^2 \Omega)$ .

Posons :

$$R = \begin{pmatrix} G' & X \\ L & 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} G' & Y \\ L & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu' \mu = (\Omega + GG')^{-1} = \Omega^+ + GG'$$

Supposons que :

$$R(\mu X)^+ \mu X = R \iff v(R') \subset v((\mu X)') \text{ alors on peut écrire [3]}$$

$$A_0 = A^* + (\mu X)^+ [R(\mu X)^+]^+ [r - R A^*]$$

$$\text{avec} \quad A^* = (\mu X)^+ \mu Y = (X'(\Omega^+ + GG')X)^+ X'(\Omega^+ + GG')Y$$

La singularité de  $\Omega$  apparaît donc dans l'expression de  $A^*$  et dans le terme correctif. Cette formule généralise la formule habituelle de l'estimateur de G.M du modèle  $(Y, X a, L a = 1, \sigma^2 I)$ ,  $X^+ X = I$  :

$$A_0 = X^+ Y + X^+ (LX^+)^+ (1 - LX^+ Y).$$

## 1.2 EQUIVALENCE LINEAIRE DE MODELES [4] [5] [7]\*

Position du problème :

Soit les deux modèles :

$$P \quad \left| \begin{array}{l} Y = X a + u \\ L a = 1 \end{array} \right.$$

$$Q \quad \left| \begin{array}{l} B Y = B X a + B u \\ M a = m \end{array} \right.$$

\* Ce paragraphe a bénéficié de nombreuses discussions avec A. MONFORT qui a déjà donné des résultats sur ce sujet par des méthodes géométriques.

où

|   |                                                |
|---|------------------------------------------------|
| Y | est le vecteur (T X 1) de la variable endogène |
| X | est la matrice (T X k) des variables exogènes  |
| u | est le vecteur (T X 1) de la variable d'erreur |

On adopte comme au paragraphe précédent les hypothèses et les notations suivantes :

$$E(u) = 0, E(uu') = \sigma^2 \Omega, \Omega = \theta\theta'$$

$$\text{avec } \text{rg}(\theta) = \text{rg}(\Omega) = s \leq T$$

. Soit les matrices F, G, R, S tels que :

$$\Omega F = F \Delta^2, F'F = I, \Omega G = 0, G'G = I, F'G = 0$$

$$B \Omega B' R = R \Delta_B^2, R'R = I, B \Omega B' S = 0, S'S = I, R'S = 0$$

( $\Delta^2$  et  $\Delta_B^2$  sont les matrices diagonales des valeurs propres positives de  $\Omega$  et  $B \Omega B'$ ).

Posons :

$$V = I - L^+ L, \quad W = I - M^+ M$$

$$H = I - (G' X V)^+ (G' X V), \quad K = I - (S' B X W)^+ (S' B X W)$$

On suppose que les deux modèles P et Q sont compatibles c'est-à-dire que l'équation

$$\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a une solution et qu'ils admettent des estimateurs sans biais c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (X V)^+ X V = V \\ (B X W)^+ B X W = W \end{cases}$$

DEFINITION :

Les modèles P et Q sont *équivalents* s'ils admettent le même estimateur de GAUSS-MARKOV de a.

La propriété suivante caractérise l'équivalence des deux modèles.

Propriété 4 :

Les modèles P et Q sont équivalents ssi :

$$X V H = \Omega B' (B \Omega B')^+ B X W K \quad (1)$$

soit, de façon équivalente

$$\left| \begin{array}{l} B X V H = B X W K \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left| \begin{array}{l} X V H = \Omega B' (B \Omega B')^+ B X V H \end{array} \right. \quad (3)$$

Démonstration :

1°) Soit  $A_P$  et  $A_Q$  les estimateurs de Gauss-Markov de a dans les modèles P et Q. On a (Cf. propriété 2)

$$A_P = PY + (I - PX) L^+ 1 \quad \text{avec}$$

$$P = (XV)^+ [I - \Omega (C \Omega C)^+] \quad \text{et}$$

$$C = I - XV(XV)^+$$

$$A_Q = QBY + (I - QBX) M^+ m \quad \text{avec}$$

$$Q = (BXW)^+ [I - B \Omega B' (DB \Omega B' D)^+] \quad \text{et}$$

$$D = I - BXW(BXW)^+$$

les estimateurs  $A_P$  et  $A_Q$  étant des estimateurs sans biais de a, il suffit d'exprimer les conditions pour que  $\text{var} (A_P - A_Q) = 0$

./.

2°) On a :

$$\text{Var } (A_P - A_Q) = (P - Q B) \Omega (P - Q B)' \sigma^2$$

$$\text{Var } (A_P - A_Q) = 0 \iff (P - Q B) \theta = 0$$

On montre dans [3] que :

$$\left| \begin{array}{l} P \theta = (\theta^+ X V H)^+ \\ \theta \theta^+ X V H = X V H \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} Q B \theta = ((B \theta)^+ B X W K)^+ = ((B \theta)^+ B X V K)^+ \\ B \theta (B \theta)^+ B X V K = B X V K \end{array} \right|$$

$$\{P \theta = Q B \theta\} \iff \{(\theta^+ X V H)^+ = ((B \theta)^+ B X W K)^+\} \iff \{\theta^+ X V H = (B \theta)^+ B X W K\}$$

$$\text{et donc : } \{P \theta = Q B \theta\} \iff \{X V H = \theta (B \theta)^+ B X W K\}$$

On en déduit :

$$B X V H = B \theta (B \theta)^+ B X W K = B X W K$$

D'où :

$$\text{Var } (A_P - A_Q) = 0 \iff X V H = \theta (B \theta)^+ B X W K \iff \left| \begin{array}{l} B X V H = B X W K \\ \theta (B \theta)^+ B X V H = X V H \end{array} \right|$$

La propriété en résulte.

### Corollaire

Si les modèles P et Q sont tels que :  $V = W$ , alors une c.n.s pour qu'ils soient équivalents est que

$$\left| \begin{array}{l} H = K \\ X V H = \Omega B' (B \Omega B')^+ B X V H \end{array} \right|$$

Démonstration :

La relation (2) de la propriété 4 s'écrit :

$$BXVH = BXVK$$

soit, en tenant compte du fait que  $(BXV)^+ BXV = V$ ,  $VH = VK$  et donc  $H = K$  d'après la définition de  $H$  et  $K$ .

Conséquences :

1°) Si la matrice  $B$  est régulière et  $V = W$ , les modèles  $P$  et  $Q$  sont équivalents. En effet, on vérifie que  $H = K$ . D'autre part la relation  $BXVK = B\theta(B\theta)^+ BXVK$  conduit à  $XVK = \theta(B\theta)^+ BXVK$  et donc à la relation (3) de la propriété 4.

2°) Soit le modèle  $(Y, Xa, \sigma^2\Omega)$ ,  $\Omega$  singulière ( $\Omega G = 0$ ,  $\Omega = \theta\theta'$ ). Ce modèle est équivalent au modèle  $(\theta^+Y, \theta^+Xa, \sigma^2I, G'Y = G'Xa)$ . Dans ce cas

$$\left| \begin{array}{l} H = I - (G'X)^+ G'X \\ K = I \\ V = I - (G'X)^+ G'X = H \\ B = \theta^+ \end{array} \right.$$

En tenant compte du fait que

$$\theta\theta^+XH = XH$$

la relation (1) qui définit l'équivalence des modèles est vérifiée.

./.

## II - REDUCTION D'UN MODELE :

Soit le modèle P

$$P \left\{ \begin{array}{l} Y = Xa + u \\ La = 1 \end{array} \right. \text{ avec } E(uu') = \sigma^2 \Omega, \Omega \text{ singulière de rang } s < T$$

que l'on partitionne en

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ où } Y_1, u_1 \text{ sont des vecteurs de dimension } (s, 1) \\ \text{et } X_1 \text{ une matrice de format } (s, k)$$

$$\Omega \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \quad \Omega_{11} \text{ régulière, rang } \Omega = s = \text{rang } \Omega_{11}$$

On étudiera dans ce paragraphe l'équivalence du modèle P avec un modèle régulier de matrice de variances-covariances  $\Omega_{11}$ . Ce problème inclut la suppression d'observations redondantes et, dans le cas d'un système à équations simultanées, la réduction de leur nombre en fonction des identités comptables. On commencera par l'étude du cas particulier où la réduction à un modèle régulier s'opère sans contrainte supplémentaire, pour généraliser ensuite au cas où cette réduction doit s'accompagner de l'introduction de nouvelles contraintes. Les propriétés mises en évidence trouvent en particulier leur application dans l'analyse de la répartition d'une quantité globale fixée entre diverses composantes.

### II.1 REDUCTION D'UN MODELE A UN MODELE REGULIER SANS CONTRAINTE SUPPLEMENTAIRE.

Ecrivons que le modèle P est équivalent au modèle Q

$$Q \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = X_1 a + u_1 \\ La = 1 \end{array} \right.$$

Remarquons d'abord qu'en fonction du corollaire de la propriété 4 l'équivalence des modèles P et Q n'est possible que si  $H = I \Leftrightarrow G'XV = 0 \Leftrightarrow v(XV) \subset v(\Omega)$ . (En effet  $B = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$  et  $B\Omega B' = \Omega_{11}$  régulière donc  $K = I$ ).

Les conditions d'équivalence s'écrivent alors puisque

$$\Omega B' = \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{21} \end{bmatrix}$$

$$(XV)^+ XV = V = (X_1 V)^+ X_1 V \Leftrightarrow v(VX') = v(VX'_1) = v(V) \quad (1)$$

$$\Omega \Omega^+ XV = XV \Leftrightarrow v(XV) \subset v(\Omega) \quad (2)$$

$$\Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} X_1 V = X_2 V \quad (3)$$

Les relations (1) expriment qu'il existe des estimateurs sans biais, la relation (2) la propriété  $H = K = I$  et la relation (3) la condition (3) de la propriété générale. Nous allons montrer que cette dernière relation est impliquée par la seconde.

#### Propriété 5 :

Soit le modèle  $P(Y, X_a, L_a = 1, \sigma^2 \Omega)$  ou l'on suppose que  $\Omega$  est une matrice  $(T, T)$  connue de rang  $s$ ,  $v(XV) \subset v(\Omega)$ ,  $v(VX') = v(VX'_1) = v(V)$ . Alors le modèle P est équivalent au modèle régulier  $Q(Y_1, X_1 a, L_a = 1, \sigma^2 \Omega_{11})$  c'est-à-dire le modèle obtenu en supprimant  $T - s$  équations.

#### Démonstration :

On peut écrire  $\Omega = \begin{bmatrix} I \\ \hline \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \end{bmatrix} \Omega_{11} \begin{bmatrix} I & \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \end{bmatrix}$

$$\text{et } [1] \quad \Omega^+ = \begin{bmatrix} I \\ \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \end{bmatrix} (I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} \Omega_{11}^{-1}$$

$$(I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} [I \mid \Omega_{11}^{-1} \Omega_{11}^{-1}]$$

$$(I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} [I \mid \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12}]$$

$$\text{donc } \Omega \Omega^+ = \begin{bmatrix} I \\ \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \end{bmatrix} (I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} [I \mid \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12}]$$

$$\Omega \Omega^+ X V = X V \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} (X_1 V + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} X_2 V) = X_1 V \\ \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} (I + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1})^{-1} [X_1 V + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} X_2 V] = X_2 V \end{cases}$$

$$\text{Soit :} \quad \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} X_1 V = X_2 V$$

relation qui avec les hypothèses faites implique l'équivalence des modèles.

## II.2 REDUCTION D'UN MODELE A UN MODELE REGULIER AVEC CONTRAINTES

### SUPPLEMENTAIRES.

Soit  $G$  une matrice  $(T, T - s)$  de rang  $T - s$  dont les colonnes sont des vecteurs propres orthogonaux et normés de  $\Omega$  correspondant aux valeurs propres nulles de  $\Omega$ .

$$\text{Partitionnons } G \text{ en } \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \text{ et posons } B = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ G'_1 & G'_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} G'X \\ L \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} G'Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

La réduction du modèle P à un modèle régulier fait l'objet de la propriété suivante :

Propriété 6 :

Soit le modèle  $P(Y, Xa, La = 1, \sigma^2 \Omega)$  on suppose que  $v(VX') = v(VX'B')$  alors P est équivalent au modèle  $(Y_1, X_1a, Ra = r, \sigma^2 \Omega_{11})$ .

Démonstration :

a) Nous allons d'abord montrer l'équivalence des modèles P et Q

$$P \left| \begin{array}{l} Y = Xa + u \\ La = 1 \end{array} \right. \quad Q \left| \begin{array}{l} BY = BXa + Bu \\ La = 1 \end{array} \right.$$

avec

$$B = \left| \begin{array}{cc} I_s & 0 \\ b'_1 & b'_2 \end{array} \right|$$

- Les conditions  $v(VX') = v(V) = v(VX'B')$  impliquent l'existence d'estimateurs sans biais pour les modèles P et Q puisqu'elles sont équivalentes à

$$(XV)^+ XV = V = (BXV)^+ BXV$$

- La relation  $H = K$  qui s'exprime par :

$$v(VX'(I - \Omega\Omega^+)XV) = v(VX'B'(I - B\Omega B'(B\Omega B')^+ )BXV)$$

est vérifiée puisque

$$I - \Omega\Omega^+ = GG' \quad (\text{décomposition spectrale de } \Omega)$$

$$B\Omega B' = \left| \begin{array}{cc} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right| \quad (B\Omega B')^+ = \left| \begin{array}{cc} \Omega_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{et donc } B'(I - B\Omega B'(B\Omega B')^+)B = \left| \begin{array}{cc} I & G_1 \\ 0 & G_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} I & 0 \\ G'_1 & G'_2 \end{array} \right| = GG'$$

./.

La relation  $\Omega B' (B \Omega B')^+ B X V H = X V H$  qui est équivalente à

$\Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} X_1 V H = X_2 V H$  est impliquée par la relation  $\Omega \Omega^+ X V H = X V H$  (la démonstration est identique à celle du paragraphe précédent).

b) D'autre part on peut vérifier, mais il est évident puisque  $G'u = 0$  que les deux modèles :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = X_1 a + u_1 \\ G'Y = G'Xa + G'u \\ La = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = X_1 a + u_1 \\ Ra = r \end{array} \right.$$

sont équivalents ce qui achève la démonstration.

Exemple :

Considérons le cas d'un modèle "diagonal" :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (P)$$

$y \quad X \quad a \quad + \quad u$

où chaque  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) est un vecteur de dimension  $T$ .

Soit  $\Omega = [\Omega_{ij}] \quad \Omega_{ij} = E(u_i u_j')$

et supposons qu'il existe une relation :

$$\sum_i y_{ti} = 1, \quad \forall t, t = 1, \dots, T$$

Cette relation s'écrit :  $R'y = J$  avec  $R' = [I_T \dots I_T]$ ,  $J = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$R'y = J \Rightarrow R'Xa = J \text{ et } \Omega R = 0$$

./.

Le modèle (P) est équivalent au modèle régulier :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$X_1 a_1 + X_2 a_2 + \dots + X_N a_N = J$$

c'est à dire un modèle ne prenant en compte que (N - 1) variables, le coefficient de régression relatif à la dernière étant obtenu par différence.

### III - EFFICACITE DES MOINDRES CARRÉS ORDINAIRES :

Remarquons d'abord que le modèle Q

$$Q \quad \begin{cases} (XV)^+ Y = (XV)^+ Xa + (XV)^+ u \\ La = 1 \end{cases}$$

admet comme estimateur de Gauss-Markov

$$A_0 = (XV)^+ Y + (I - (XV)^+ X) L^+ 1$$

quelle que soit la matrice  $\Omega$  de variances-covariances de  $u$  et que  $A_0$  est l'estimateur des moindres carrés ordinaires du modèle  $(Y, Xa, La = 1, \sigma^2 I)$  c'est-à-dire du modèle initial dans lequel on suppose que  $\Omega = I$ .

Les conditions d'équivalence du modèle initial et de Q donnent donc les conditions d'efficacité des moindres carrés ordinaires.

#### Propriété 7 :

Soit le modèle  $P(Y, Xa, La = 1, \sigma^2 \Omega)$ . Soit la matrice des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres nulles de  $\Omega$  et  $S$  la matrice des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres nulles de  $(XV)^+ \Omega (XV)^+$  avec  $V = I - L^+ L$  et posons :

$$H = I - (G'XV)^+ G'XV \text{ et } K = I - (S'(XV)^+ XV)^+ S'(XV)^+ XV$$

alors P admettra comme estimateur de Gauss-Markov l'estimateur des moindres carrés ordinaires ssi

$$H \left| \begin{array}{l} (1) (XV)^+ XV = V \\ (2) H = K \\ (3) \Omega (XV)^+ ((XV)^+ \Omega (XV)^+)^+ (XV)^+ XVH = XVH \end{array} \right.$$

ou de manière équivalente

$$H^* \left| \begin{array}{l} (1) v(VX') = v(V) \\ (2) v(\Omega XV) \subset v(XV) \end{array} \right.$$

Démonstration :

Les conditions H(1), (2), (3) proviennent directement de l'application de la propriété 4 sur l'équivalence des modèles.

La démonstration directe de l'équivalence H et  $H^*$  est plus délicate.

Elle est simple si on recourt à la démonstration de la propriété 4

$$A_P = PY + (I - PX) L^+ 1$$

avec

$$P = (XV)^+ (I - \Omega (C \Omega C)^+) = (XV)^+ (I - \theta (C \theta)^+)$$

$$C = I - XV(XV)^+ \Omega = \theta \theta'$$

$$A_Q = (XV)^+ Y + (I - (XV)^+ X) L^+ 1$$

./.

$$V(A_P - A_Q) = 0 \iff (XV)^+ \theta (C \theta)^+ \theta = 0$$

$$\updownarrow$$

$$(XV)^+ \theta (C \theta)^+ C \theta = 0$$

$$\updownarrow$$

$$(XV)^+ \theta \theta' C (\theta' C)^+ = 0$$

$$\updownarrow$$

$$(XV)^+ \theta \theta' C = 0$$

$$\updownarrow$$

$$XV(XV)^+ \Omega (I - XV(XV)^+) = 0$$

$$\updownarrow$$

$$(I - XV(XV)^+) \Omega XV(XV)^+ = 0$$

$$\updownarrow$$

$$(I - XV(XV)^+) \Omega XV = 0$$

$$\updownarrow$$

$$v(\Omega XV) \subset v(XV)$$

REMARQUE :

Dans le cas de "modèles diagonaux"

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

$$y = X a + u$$

la condition d'efficacité des mco,  $v(\Omega X) \subset v(X)$ ,  $X^+ X = I$  prend, avec les notations du paragraphe précédent, la forme simple suivante :

$$\left| \begin{array}{l} v(\Omega_{ij} X_j) \subset v(X_i) \\ X_i^+ X_i = I \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall i, \forall j \\ \forall i \end{array}$$

L'estimateur des moindres carrés  $\hat{A}$  de  $a$  étant alors défini par

$$\hat{A}_i = X_i^+ Y_i$$

Les conditions précédentes sont en particulier vérifiées dans le cas où les variables explicatives  $X_i$  sont identiques et les résidus indépendants du premier indice  $t$ . En effet :

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} I_T$$

et la relation  $XX^+ \Omega_{ij} X = \Omega_{ij} X$  est vérifiée.

Dans ce cas, indépendamment de toute relation sur les variables  $Y_i$  la méthode des mco est efficace.

On trouvera dans [4] et [5] deux illustrations de nature différente. La première concerne l'estimation de fonctions de consommation du type de Leser. La seconde est relative à l'évolution des gains de parts de marché international des principaux pays de l'OCDE.

-----

## B I B L I O G R A P H I E

-----

- [1] ADI BEN-ISRAEL et Thomas N.E. GREVILLE :

Generalized Inverses - Theory and Applications - Wiley - 1974.

- [2] C. FOURGEAUD et B. LENCLUD :

Modèles linéaires équivalents - Colloque international - Structures Economiques et Econométries - Lyon - 1976.

- [3] C. FOURGEAUD et B. LENCLUD :

Régression pseudo-inverse et programmes mathématiques - Groupe de Mathématiques Economiques - Note de discussion - Décembre 1973.

- [4] C. FOURGEAUD et B. LENCLUD :

Problèmes d'estimation d'un modèle économétrique vectorialisé - Equivalence linéaire - Congrès Européen de la Société d'Econométrie - Helsinki 1976.

- [5] C. FOURGEAUD et B. LENCLUD :

Problèmes d'estimation d'un modèle économétrique vectorialisé Cahiers du Séminaire d'Econométrie N° 19.

- [6] E. MALINVAUD :

Méthodes statistiques de l'économétrie - Seconde édition - Dunod - 1969.

- [7] A. MONFORT :

Notions of Equivalence and Sufficiency in Linear Models - Troisième Congrès Mondial d'Econométrie - Toronto - Août 1975.

- [8] C.R. RAO et MITRA :

Generalized Inverses of Matrices and its Applications - Wiley - 1971.

- [9] P. SCHONFELD :

Best Linear Minimum Biases Estimation in Linear Regression - Econometrica - Volume 39 - Mai - 1971.

- [10] H. THEIL :

Principles of Econometrics - Wiley - 1971.